(3)

Έστω $S \sim$ σύνθετη Γεωμετρική $\left(\frac{1}{3}; b\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

δηλ. $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, $N \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$, X_i iid $\sim b\left(\frac{1}{4}\right)$

α) Ζητάμε την συνάρτηση πιθανότητας της S

δηλ. $P(S=k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Η πιθανογεννήτρια της S είναι $P_S(u) = P_N(P_X(u))$

με $P_N(u) = \dfrac{p}{1-(1-p)u} = \dfrac{1/3}{1-\frac{2}{3}u} = \dfrac{1}{3-2u}$, $|u| < 3/2$

αφού $N \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$

και $P_X(u) = (1-p+pu)^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}u = \dfrac{3+u}{4}$

αφού $X_i \sim b\left(\frac{1}{4}\right)$

άρα $P_S(u) = \dfrac{1}{3-2\cdot P_X(u)} = \dfrac{1}{3-2\cdot\frac{3+u}{4}} = \dfrac{2}{3-u}$

$P_S(u) = \dfrac{2/3}{1-\frac{u}{3}} = \dfrac{2/3}{1-(1-2/3)u}$, $|u| < \dfrac{1}{1/3}$ για $|u| < 3$

$\left(\left|\dfrac{3+u}{4}\right| < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < \dfrac{3+u}{4} < \dfrac{3}{2}\right.$

$\Leftrightarrow -6 < 3+u < 6$

$\Leftrightarrow -9 < u < 3$

$\Rightarrow \underline{|u| < 3}$

$\Rightarrow S \sim Geom\left(\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow P(S=k) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$S_N \sim G(2/3)$

(β) $E[S_N] = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{1-2/3}{2/3} = \dfrac{1}{2}$

$Var(S_N) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{1-2/3}{4/9} = \dfrac{3}{4}$ επειδή $S \sim G(2/3)$

(γ) $P(S \leq (1+k)E[S]) \overset{(\beta)}{=\!=} P\left(S \leq \dfrac{1+k}{2}\right) = P\left(S \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{2k}{4}\right)$

$P(S \leq E[S] + k \cdot Var(S)) \overset{(\beta)}{=} P\left(S \leq \dfrac{1}{2} + k \cdot \dfrac{3}{4}\right)$

Ισχύει $P(S \leq (1+k)E[S]) = P(S \leq E[S] + kVar(S))$

$\Leftrightarrow P\left(S \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{2k}{4}\right) = P\left(S \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{3k}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\Leftrightarrow \left\lfloor \dfrac{1}{2} + \dfrac{2k}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{1}{2} + \dfrac{3k}{4} \right\rfloor$ S διακριτή, $S \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\Leftrightarrow k \in \{0, 1, 3\}$.

Γιατί για $k=2$ έχω $\left\lfloor 1 + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 1 \neq 2 = \lfloor 2 \rfloor$

και για $k \geq 4$ έχω $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}k - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{k}{2}\right) = \dfrac{k}{4} \geq 1$.

Όμως για $k=0$: $P\left(S \leq \dfrac{1}{2}\right) = P(S=0) = \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{26}{27}$

$k=1$: $P(S \leq 1) = P(S=0) + P(S=1) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} \neq \dfrac{26}{27}$

$k=3$: $P(S \leq 2) = P(S=0) + P(S=1) + P(S=2) = \dfrac{26}{27}$

άρα $\boxed{k=2}$.

(4) (α) $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

με $N \sim P(N=k) = \frac{1}{3}$, $k = 0, \alpha, 2\alpha$

και $X_i \sim \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, b\right)$ iid

άρα $M_S(t) = P_N(M_X(t))$ όπου $P_N(u)$ η πιθ/γεννήτρια της N

και $M_X(t)$ η ροπογ/γεννήτρια της X

$P_N(u) = E[u^N] = u^0 P(N=0) + u^{\alpha} P[N=\alpha] + u^{2\alpha} P[N=2\alpha]$

$= \frac{1}{3} + \frac{u^{\alpha}}{3} + \frac{u^{2\alpha}}{3} = \frac{1 + u^{\alpha} + u^{2\alpha}}{3}$, $\forall u \in \mathbb{R}$

$M_X(t) = \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{b}}\right)^{1/\alpha}$ για $t < b$ (ροπογεννήτρια Γάμμα)

$M_{S_N}(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(1 - \frac{t}{b}\right)} + \frac{1}{3\left(1 - \frac{t}{b}\right)^2}$ ανεξάρτητη του $\alpha \in \{1, 2, \dots\}$

(β) $E[S] = E[N]\mu = E[N] \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{b}$ $\left(\mu = E[X] = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{b}\right.$ $\left. X \sim \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, b\right)\right)$

και $E[N] = \sum_{k \in \{0, \alpha, 2\alpha\}} k \cdot P[N=k] = \alpha P[N=\alpha] + 2\alpha P[N=2\alpha]$

$= \alpha \frac{1}{3} + 2\alpha \cdot \frac{1}{3} = \alpha$.

άρα $E[S] = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$

Επίσης $Var(S) = E[N]\sigma^2 + Var(N)\mu^2$

με $Var(N) = E[N^2] - (E[N])^2$ και $\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{b^2}$.

③ Συλλογικό Μοντέλο κινδύνου $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

όπου η τ.μ. $N \sim Poisson(\lambda)$ και

$$X_i \sim P(X_i = x) = \frac{x^2}{30}, \quad x = 1,2,3,4$$

Άρα $S_N \sim$ σ. Poisson $(\lambda, P(X_i = x))$

$$\Rightarrow E[S] = \lambda \cdot \mu$$

όπου $\mu = E[X] = \sum_{x=1}^{4} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^3}{30}$

$$= \frac{1}{30}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}$$

(α) Άρα $E[S] = \frac{10}{3} \cdot \lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$

(β) $Var(S) = \lambda \cdot (\mu^2 + \sigma^2) = \lambda E[X^2] = \frac{18}{5} \cdot \frac{59}{5} = 42,48$

$E[X^2] = \sum_{x=1}^{4} x^2 P[X = x] = \sum_{x=1}^{4} x^2 \cdot \frac{x^2}{30} = \frac{1}{30} \cdot \sum_{x=1}^{4} x^4$

$$= \frac{1}{30}(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4) = \frac{354}{30} = \frac{59}{5}$$

, $S_{(1)} = \sum_{i=1}^{N_1} X_i$ και $S_{(2)} = \sum_{j=1}^{2} Y_j$

$N_1 \sim Poisson(v) \Rightarrow S_{(1)} \sim \sigma Poisson(v, U\{1,2,3\})$

$X_i \sim f_{X_i}(x) = \frac{1}{3}, x = 1,2,3$

$N_2 \sim Poisson(2v) \Rightarrow S_{(2)} \sim \sigma Poisson(2v, Exp(\theta))$

$Y_j \sim Exp(\theta)$

$S_{(1)}, S_{(2)}$ στοχαστικά ανεξάρτητες αφού οι τυχαίες

της κάθε κατηγορίας είναι ανεξάρτητες

α από γνωστό θεώρημα η $S_r = S_{(1)} + S_{(2)} \sim \sigma Poisson(\lambda, F(x))$

$\lambda = v + 2v = 3v$ και $F(x) = \frac{v}{v+2v} F_X(x) + \frac{2v}{v+2v} F_Y(x)$

όπου $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2 \\ 2/3, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ και $F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x}, & x \geq 0 \end{cases}$

άρα $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3}(1 - e^{-\theta x}), & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-\theta x}), & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-\theta x}), & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}(1 - e^{-\theta x}) & x \geq 3 \end{cases}$

(B) Έστω P_v = κέρδος της εταιρείας.

κέρδος από την i-γραμμή κατηγορίας $I = 4 - X_i$

" " j- " " $II = 3 - Y_j$

<u>Συνολικό κέρδος</u> $P_v = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_1} (4 - X_i)}_{P_{(1)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_2} (3 - Y_j)}_{P_{(2)}}$

Επειδή $N_1 \sim Poisson(v) \Rightarrow P_{(1)} \sim \sigma Poisson(v)$ ανεξάρτητες

$N_2 \sim Poisson(2v) \Rightarrow P_{(2)} \sim \sigma Poisson(2v)$

άρα το $P_v = P_{(1)} + P_{(2)} \sim \sigma Poisson(3v)$

Το συνολικό P_v κέρδος ορίζεται και ως εξής

$$P_v = 4N_1 - S_{(1)} + 3N_2 - S_{(2)}$$

$$\Rightarrow E(P_v) = E[4N_1 - S_{(1)} + 3N_2 - S_{(2)}] =$$

$$= 4E[N_1] - E[S_{(1)}] + 3E[N_2] - E[S_{(2)}]$$

Έχουμε $N_1 \sim Poisson(v) \Rightarrow E(N_1) = v$

$N_2 \sim Poisson(2v) \Rightarrow E(N_2) = 2v$

$S_{(1)} \sim \sigma Poisson(v, U\{1,2,3\}) \Rightarrow E[S_{(1)}] = v \cdot \mu = v \cdot \frac{1+2+3}{3} = 2v$

$S_{(2)} \sim \sigma Poisson(v, Exp\,\theta) \Rightarrow E[S_{(2)}] = 2v\mu = \frac{2v}{\theta}$.

Άρα $E[P_\nu] = 4\nu + 3\cdot 2\nu - 2\nu - \frac{2\nu}{\theta} = \frac{2\nu(4\theta - 1)}{\theta}$

$N_1, S_{(1)}, N_2, S_{(2)}$ ανεξ.

$$Var(P_\nu) = Var(4N_1 - S_{(1)} + 3N_2 - S_{(2)})$$

$$= 16\,Var(N_1) + Var(S_{(1)}) + 9\,Var(N_2) + Var(S_{(2)})$$

Όμως $N_1 \sim Poisson(\nu) \Rightarrow Var(N_1) = \nu$

$N_2 \sim Poisson(2\nu) \Rightarrow Var(N_2) = 2\nu$

$S_{(1)} \sim \sigma Poisson(\nu, U\{1,2,3\}) \Rightarrow Var(S_{(1)}) = \nu \cdot E[X^2] = \nu \cdot \frac{1^2+2^2+3^2}{3}$

$S_{(2)} \sim \sigma Poisson(2\nu, Exp(\theta)) \Rightarrow Var(S_{(2)}) = 2\nu\, E[Y^2] = 2\nu \frac{2}{\theta^2}$

Άρα $Var(P_\nu) = 16\nu + \frac{14\nu}{3} + 18\nu + \frac{4\nu}{\theta^2} = \frac{116\nu}{3} + \frac{4\nu}{\theta^2}$

(γ) Από (β) η $P_\nu \sim \sigma Poisson(3\nu, F)$

άρα το [illegible] $N_\nu \sim Poisson(3\nu)$

Ισχύς ΚΟΘ

$$E\left[\frac{N_\nu}{\nu}\right] = \frac{3\nu}{\nu} = 3 \longrightarrow 3 \quad \text{για } \nu \to \infty$$

$$Var\left(\frac{N_\nu}{\nu}\right) = \frac{3\nu}{\nu^2} = \frac{3}{\nu} \longrightarrow 0$$

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΚΟΘ για το P_ν

δηλ. η $\frac{P_\nu - E[P_\nu]}{\sqrt{Var(P_\nu)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ για $\nu \to \infty$

οπότε για μεγάλα ν, η τ.μ. $Z = \dfrac{P_\nu - E[P_\nu]}{\sqrt{Var.(P_\nu)}} \approx N(0,1)$

Για $q = \frac{1}{4}$ έχω ότι $E(P_\nu) = 0$, άρα

$$P(\text{ζημίας εταιρείας}) = P(P_\nu < 0) =$$

$$= P\left(\frac{P_\nu - 0}{\sqrt{Var(P_\nu)}} < 0\right) = P(Z < 0) \overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

(5) Έχουμε X_i = αποζημιώσεις $\sim Exp(1)$

και το τυχαίο πλήθος τους $N_\nu \sim NB\left(\nu, p=\frac{1}{2}\right)$

Άρα η $S_\nu = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_\nu} \sim \sigma.\, NB\left(\nu, p=\frac{1}{2}, Exp(1)\right)$

και θα έχουμε.

(α) $$M_{S_\nu}(t) = P_N(M_X(t)) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{M_X(t)}{2}}\right)^\nu = \left(\frac{1}{2-\frac{1}{1-t}}\right)^\nu$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t<1 \quad \text{και} \quad P_{N_\nu}(u) = \left(\frac{p}{1-(1-p)u}\right)^\nu, \quad |u| < \frac{1}{1-p}$$

$$M_{S_\nu}(t) = \left(\frac{1-t}{1-2t}\right)^\nu \quad \text{για} \quad \frac{1}{1-t} < \frac{1}{1/2} = 2 \quad \text{και } t<1$$

$$\iff 1 < 2-2t \Rightarrow t < \frac{1}{2} < 1$$

(β) $$E[S_\nu] = r \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \mu = \nu \cdot \frac{1-1/2}{1/2} \cdot E[X] = \nu \cdot \frac{1}{1} = \nu$$

$$Var(S_\nu) = r \cdot \frac{1-p}{p}\left(\sigma^2 + \frac{\mu^2}{p}\right) = \nu \cdot \frac{1-1/2}{1/2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1/2}\right) = 3\nu$$

(γ) Λογικό καθώς $N \sim NB\left(\nu, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ $$E[N] = \nu \cdot \frac{1-\frac{1}{2}}{1/2} = \nu$$
$$Var[N] = \nu \cdot \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2\nu$$

$$E\left[\frac{N_\nu}{\nu}\right] = \frac{E[N_\nu]}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1 \to 1 \quad \text{για } \nu \to \infty$$

$$Var\left(\frac{N_\nu}{\nu}\right) = \frac{Var(N_\nu)}{\nu^2} = \frac{2\nu}{\nu^2} = \frac{2}{\nu} \to 0$$

Άρα ισχύει το ΚΟΘ για τη S_ν και άρα

$$\text{η} \quad \frac{S_\nu - E[S_\nu]}{\sqrt{Var(S_\nu)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{για } \nu \to \infty$$

δηλ. για $\nu = 1000$ θα έχω ότι η

$$Z = \frac{S_{1000} - E[S_{1000}]}{\sqrt{Var(S_{1000})}} = \frac{S_{1000} - 1000}{\sqrt{Var(S_{1000})}} \approx N(0,1)$$

Άρα η $P(S_{1000} > 1000) = P\left(\frac{S_{1000} - 1000}{\sqrt{Var(S_{1000})}} > 0\right)$

$$= P(Z > 0) \overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx} 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

(9) Έστω τα παρακάτω συλλογικά μοντέλα

$$S_1 \sim \sigma NB(r, p; G(p_1)),\ r \in \{1, 2, \dots\},\ p = \frac{1}{2}.$$

και X_i = μέγεθος ατομικής ζημιάς iid $\sim G(p_1)$, $p_1 \in (0,1)$

και $$S_2 \sim \sigma b(r, p; G(p_2)),\ r \in \{1, 2, \dots\},\ p = \frac{1}{2}$$

και Y_j = μέγεθος ατομικής ζημιάς iid $\sim G(p_2)$, $p_2 \in (0,1)$

άρα S_1, S_2 δύο διακριτές και τότε θα εξετάσω τις αντίστοιχες πιθανογεννήτριες $P_{S_1}(u) = P_{N_1}(P_X(u))$

και $P_{S_2}(u) = P_{N_2}(P_Y(u))$

Επειδή $N_1 \sim NB(r, \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$$P_{N_1}(u) = \left(\frac{p}{1-(1-p)u}\right)^r = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{u}{2}}\right)^r = \left(\frac{1}{2-u}\right)^r, \quad |u| < 2$$

και X_i iid $\sim G(p_1) \Rightarrow P_X(u) = \dfrac{p_1}{1-(1-p_1)u}$, $|u| < \dfrac{1}{1-p_1}$

Άρα $$P_{S_1}(u) = \left(\frac{1}{2 - \frac{p_1}{1-(1-p_1)u}}\right)^r = \left(\frac{1-(1-p_1)u}{2-p_1-2(1-p_1)u}\right)^r, \text{ για } |u| \le 1.$$

Επίσης $N_2 \sim b(r, p)$ με $p = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{N_2}(u) = (1-p+pu)^r$

$$\Rightarrow P_{N_2}(u) = \left(\frac{1+u}{2}\right)^r$$

και Y_j iid $\sim G(p_2) \Rightarrow P_Y(u) = \frac{p_2}{1-(1-p_2)u}$, $|u| < \frac{1}{1-p_2}$

Άρα $P_{S_2}(u) = \left(\frac{1 + \frac{p_2}{1-(1-p_2)u}}{2}\right)^r = \left(\frac{1+p_2-(1-p_2)u}{2-2(1-p_2)u}\right)^r$, $|u| \le 1$

Ισχύει ότι $S_1 \overset{d}{=} S_2 \Leftrightarrow P_{S_1}(u) = P_{S_2}(u) \quad \forall |u| \le 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-(1-p_1)u}{2-p_1-2(1-p_1)u}\right)^r = \left(\frac{1+p_2-(1-p_2)u}{2-2(1-p_2)u}\right)^r \quad \forall |u| \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-(1-p_1)u}{2-p_1-2(1-p_1)u} = \frac{1+p_2-(1-p_2)u}{2-2(1-p_2)u}$$

$$\Leftrightarrow (1-(1-p_1)u)\,2(1-(1-p_2)u) = (1+p_2-(1-p_2)u)(2-p_1-2(1-p_1)u)$$

$$\Leftrightarrow 2-2(2-p_1-p_2)u = (2-p_1)(1+p_2) - [(2-p_1)(1-p_2)+2(1-p_1)(1+p_2)]u$$

πολυώνυμα ως προς u

$$\Leftrightarrow 2 = (2-p_1)(1+p_2) \quad (1)$$

και

$$2(2-p_1-p_2) = (2-p_1)(1-p_2) + 2(1-p_1)(1+p_2) \quad (2)$$

4) (1) $\Rightarrow \quad p_1 = \dfrac{2p_2}{1+p_2}$, ή $\quad p_2 = \dfrac{p_1}{2-p_1}$

και η (2) $\Rightarrow \quad p_1 = \dfrac{2p_2}{1+p_2}$

Άρα $\quad S_1 \overset{d}{=} S_2 \iff p_1 = \dfrac{2p_2}{1+p_2}$.

Ασκήσεις 2ης σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1: Ασκήσεις 22-24 από Ι. Κουτρουβέλη

(22) Έχουμε ατομικό μοντέλο $S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i$

με $I_i \sim b(q_i)$ (Bernoulli) ανεξάρτητες και ισόνομες

με $q = 0.01$ και ύψη αποζημιώσεων $X_i \sim f(x) = e^{-x}, x>0$

δηλ. $X_i \sim Exp(1)$ ανεξάρτητες και ισόνομες.

(i) Γνωρίζουμε ότι $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \frac{1}{10}$

με $E[S] = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} q \mu = nq\mu$

όπου $\mu = E[X_i] = \frac{1}{1} = 1$, και $q = 0{,}01$ άρα $E[S] = 0.01n$.

και $Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i)\mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} q\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} q(1-q)\mu^2 =$

όπου $\sigma^2 = Var(X_i) = \frac{1}{1^2} = 1$ $\quad = nq\left(\sigma^2 + (1-q)\mu^2\right)$

και άρα $Var(S) = n \cdot 0.01\left(1 + 0.99 \cdot 1^2\right) = n \cdot 0.01 \cdot 1.99$

Αντικαθιστώ και έχω $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \frac{\sqrt{n \cdot 0.01 \cdot 1.99}}{0.01n} = \sqrt{\frac{1.99}{0.01n}}$

$$= \sqrt{\frac{1.99}{0.01n}} = \sqrt{\frac{199}{n}} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{199}{n} = \frac{1}{100} \Rightarrow n = 19900$$

(ii). Αν το $\theta = 0.0392$ (περιθώριο ασφαλείας) ώστε η

$P\left(S > (1+\theta)E[S]\right) = 0.025$ έχουμε ότι

από εφαρμογή του ΚΟΘ για την S προκύπτει ότι

$$\theta = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]}$$

όπου z_α τέτοιο ώστε $\Phi(z_\alpha) = 1-\alpha = 1-0.025 = 0.975$

(όπου προφανώς έχω το $\alpha = 0.025$)

Από τους πίνακες τιμών της σ.κ της $N(0,1)$ $\Rightarrow z_{0.025} = 1.96$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω έχω το $z_{0.025} = 1.96$, $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \sqrt{\frac{199}{n}}$

και $\theta = 0.0392$ και προκύπτει ότι

$$1.96\sqrt{\frac{199}{n}} = 0.0392 \Rightarrow \sqrt{\frac{199}{n}} = \frac{0.0392}{1.96} = 0.02$$

$$\Rightarrow n = \frac{199}{0.02^2} = \frac{199}{0.0004} = 497500$$

(iii) Έστω ότι $\theta_1 = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{199}{n_1}}$ (1)

τότε για $2n_1$ ανεξάρτητο πλήθος κινδύνων και το ίδιο πιθανότητα

σε για να χρεωκοπήσει η εταιρεία, το περιθώριο ασφαλείας θα είναι

$\theta = z_\alpha \frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = z_\alpha \sqrt{\frac{199}{2n_1}}$ (2) Διαιρώ (1), (2) κατά μέλη.

$$\Rightarrow \frac{\theta_1}{\theta} = \sqrt{\frac{2n_1}{n_1}} \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\theta_1$$

(iv) Για n κινδύνους απαιτείται περιθώριο ασφαλείας θ_1 ώστε

$P(S > (1+\theta)E[S]) = 0.05$ τότε $\theta_1 = z_{0.05}\cdot\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = z_{0.05}\sqrt{\frac{199}{n}}$ (1)

ενώ για n κινδύνους και $P(S > (1+\theta)E[S]) = 0.01$

απαιτείται περιθώριο ασφαλείας $\theta = z_{0.01}\sqrt{\frac{199}{n}}$ (2)

Ομοίως, διαιρώντας κατά μέλη (1), (2) $\Rightarrow \frac{\theta_1}{\theta} = \frac{z_{0.05}}{z_{0.01}} \Rightarrow \theta = \frac{z_{0.01}}{z_{0.05}}\theta_1$

όπου $z_{0.05}$: $\Phi(z_{0.05}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.64$

και $z_{0.01}$: $\Phi(z_{0.01}) = 0.99 \Rightarrow z_{0.01} = 2.326$

όπου $\Phi(z)$ η σ.κ. της $N(0,1)$

Άρα $\theta = \frac{2.326}{1.64}\theta_1 = 1.4146\,\theta_1$

(23) Ατομικό μοντέλο n κινδύνων, με πιθ. πραγματοποίησης

$q = 0.01$ και ύψη ατομικών αποζημιώσεων $X_i \sim f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-3x}$, $x \geq 0$

ανεξάρτητες και ισόνομες τμ.

Η συνολική αποζημίωση είναι $S = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i$

με I_i iid $\sim b(q)$ με $E[S] = \sum_{i=1}^{n} q_i\mu_i = \sum_{i=1}^{n} q\mu = nq\mu$

και $Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i (1-q_i) \mu_i^2$

$= \sum_{i=1}^{n} q \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} q(1-q) \mu^2$

$= nq\left(\sigma^2 + (1-q)\mu^2\right)$

μ: $\mu = E[X_i] = \int x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\left(e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-3x}\right) dx$

$= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{3}{2}x} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx =$

$= \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{+\infty} x \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} dx}_{= E[Exp(\frac{3}{2})]} + \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^{+\infty} x\, 3e^{-3x} dx}_{= E[Exp(3)]} =$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$E[X_i^2] = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{3}{2}x} dx + \int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} dx.$

$= \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} x^2 \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}x} dx + \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} x^2\, 3e^{-3x} dx =$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^2}\right) = \frac{16}{27} + \frac{2}{27} = \frac{18}{27}.$

<u>Προσέχουμε</u> Αν $X \sim Exp(\lambda)$ τότε $E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

και $\sigma^2 = Var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{18}{27} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{29}{81}$

Άρα $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \frac{\sqrt{nq\left(\sigma^2 + (1-q)\mu^2\right)}}{nq\mu} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{nq\mu^2}} < \varepsilon,$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{nq\mu^2} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{\varepsilon^2 q \mu^2}$$

όπου $\frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{\varepsilon^2 q\mu^2} = \frac{\sigma^2 + \mu^2 - q\mu^2}{\varepsilon^2 q\mu^2} = \frac{E[X_i^2] - q\mu^2}{\varepsilon^2 q\mu^2}$

$$= \frac{EX_i^2}{\varepsilon^2 q\mu^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{18}{27}}{\varepsilon^2 \cdot 0.01 \frac{25}{81}} - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{215}{\varepsilon^2}$$

άρα $n > \frac{215}{\varepsilon^2}$

(ii) Επειδή $\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \approx N(0,1)$ αν και για $n=860$

$$\Rightarrow Pr\left(S > (1+\theta)E[S]\right) = Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

$$\overset{\theta = \frac{3}{2}}{\underset{n=860}{=}} Pr\left(Z > \frac{3}{2} \cdot \frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

Όμως $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{nq\mu^2}} = \sqrt{\frac{\frac{29}{81} + 0.99 \cdot \frac{25}{81}}{860 \cdot 0.01 \cdot \frac{25}{81}}} = \sqrt{0.25} = 0.5$

Άρα $Pr\left(Z > \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{0.5}\right) = Pr(Z > 3) = 1-\Phi(3) = 0.00135.$

(iii) Για $\theta = \frac{1}{2}$ τότε για $\alpha = 0.00135$ από τύπο του περιθωρίου ασφαλείας θα έχουμε

$$\theta = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = 3\cdot\sqrt{\frac{\sigma^2+(1-q)\mu^2}{nq\mu^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\sigma^2+(1-q)\mu^2}{nq\mu^2}} = \frac{\theta}{3} \Rightarrow \frac{\sigma^2+(1-q)\mu^2}{nq\mu^2} = \frac{\theta^2}{9} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow n = 36\cdot\frac{\sigma^2+(1-q)\mu^2}{q\mu^2} = \frac{\sigma^2+(1-q)\mu^2}{\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2}_{\varepsilon} q\mu^2} \overset{(i)}{=} \frac{215}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$= 36\cdot 215 = 7740.$$

(24) Χαρτοφυλάκιο η σύνθετη με $(q=\frac{1}{2};\ \mu, \sigma^2)$ έχει περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0{,}01$ και πιθανότητα ότι το ασφάλιστρο δεν θα επαρκέσει $P(S > (1+\theta)E[S]) = \alpha \le 0.025$

Από ΚΟΘ $Z = \frac{S-E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \approx N(0,1)$ και $P(S > (1+\theta)E[S]) =$

$$= P\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) = P\left(Z > \theta\cdot\frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) = \alpha \le 0{,}025$$

$$1-\Phi\left(\theta\cdot\frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \le 0.025 \Leftrightarrow \Phi\left(\theta\cdot\frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \ge 0.975 = \Phi(1.96)$$

$\Phi_{0.95}$

$$\iff \theta \cdot \frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \geq 1.96 \iff \frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} \leq \frac{0.01}{1.96} = \frac{1}{196}$$

$$\iff \frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{nq\mu^2} \leq \frac{1}{196} \qquad \sigma^2 = Var(X) = \mu^2,\ \mu = E[X],\ q = \tfrac{1}{2}$$

$$\iff n \geq \frac{\mu^2 + \frac{1}{2}\mu^2}{\frac{1}{2}\mu^2} = 3 \cdot 196$$

(ii) $q = \frac{1}{2}$, $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2 = \mu$ έχει η ωστε $z_a = \theta \cdot \frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}} = z_a$

τότε $Pr\left(S > (1+\theta)E[S]\right) = Pr\left(Z > \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) = \alpha$

$$\iff 1 - \Phi\left(\frac{\theta \cdot E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) = 1 - \Phi(z_a)$$

$$\iff \theta \cdot \frac{E[S]}{\sqrt{Var(S)}} = z_a \iff \frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \frac{\theta}{z_a}$$

όμως $\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + (1-q)\mu^2}{nq\mu^2}} = \sqrt{\frac{\mu + \frac{1}{2}\mu^2}{n\frac{1}{2}\mu^2}} = \frac{\theta}{z_a}$

$$\iff \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu^2}{n\frac{\mu^2}{2}} = \left(\frac{\theta}{z_a}\right)^2$$

$$\iff n = \frac{\mu + \frac{\mu^2}{2}}{\frac{\mu^2}{2}} \cdot \left(\frac{z_a}{\theta}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{\mu}\right)\left(\frac{z_a}{\theta}\right)^2$$