Λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων.

Στοχ. Ανέλιξη Πλεονάσματος - Θεωρία Χρεοκοπίας

1 (α) Θεωρούμε την ΣΑΠ $U(t) = u + ct - S(t)$

όπου $S(t) \sim$ σPoisson$(\lambda, F(x))$ όπου $\mu_k = E[X_j^k]$, $k=1,2,\ldots$

X_j ανεξάρτητες = ύψη ατομικών αποζημιώσεων. και

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$ Για $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ έχω ότι

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t - S(t) \Rightarrow$$

$EU(t) = u + \theta\lambda\mu_1 t$ και $Var(U(t)) = \lambda t \mu_2$

άρα η $$\sigma(t) = \frac{\sqrt{Var(t)}}{EU(t)} = \frac{\sqrt{\lambda t \mu_2}}{u + \theta\lambda\mu_1 t} \Leftrightarrow$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{\dfrac{u}{\sqrt{\lambda\mu_2 t}} + \dfrac{\lambda\theta\mu_1}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \cdot \sqrt{t}}, \quad t>0$$

με $\lim_{t\to\infty} \frac{u}{\sqrt{\lambda\mu_2 t}} = 0$ και $\lim_{t\to\infty} \frac{\lambda\theta\mu_1}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \cdot \sqrt{t} = \begin{cases} +\infty, & \theta>0 \\ 0, & \theta=0 \end{cases}$

άρα αν $\theta = 0$ τότε $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \frac{1}{0} = +\infty$

αφού $\frac{u}{\sqrt{\lambda\mu_2 t}} + \frac{\lambda\theta\mu_1}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \cdot \sqrt{t} > 0 \quad \forall t$

ενώ αν $\theta > 0$ τότε $\lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = \frac{1}{\infty} = 0$

β) Όπως πριν θεωρώ τις ΣΑΠ

$$U_j(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t - S_j(t) \quad , j = 1, 2.$$

όπου $S_j(t)$ = η συνολική αποζημίωση στο $(0,t]$ ~ σ Poisson $(\lambda t, F(x))$

με $\mu_k = E[X_i^k]$ και $E U_j(t) = u + \theta\lambda\mu_1 t$ και $Var(U_j(t)) = \lambda t \mu_2$

Οι $S_j(t)$ είναι <u>ισόνομες</u> και ανεξάρτητες άρα έχουν τις ίδιες παραμέτρους και η $S(t) = S_1(t) + S_2(t) \sim$ σ Poisson$(2\lambda t, G(x))$

με $G(x) = \frac{\lambda}{2\lambda} F(x) + \frac{\lambda}{2\lambda} F(x) = F(x)$ λόγω του ότι είναι ισόνομες άρα $\mu_k' = E[Y_i^k] = \mu_k$ με Y_i ατομ. αποζημιώσεις οι αντίστοιχοι στην $S(t)$

Θεωρώ τη συνολική ΣΑΠ $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$

$$= u' + (1+\theta')2\lambda\mu_1 t - S(t)$$

αφού η $S(t) = S_1(t) + S_2(t) \sim$ σ Poisson $(2\lambda, F(x))$

άρα: $EU(t) = u' + \theta' 2\lambda t \mu_1$ και $Var\, U(t) = 2\lambda t \mu_2$.

Ζητάμε τα u' και θ' ώστε

$$\frac{\sqrt{Var(U(t))}}{EU(t)} = \frac{\sqrt{Var\, U_1(t)}}{EU_1(t)} \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2\lambda t \mu_2}}{u' + \theta' 2\lambda t \mu_1} = \frac{\sqrt{\lambda t \mu_2}}{u + \theta \lambda t \mu_1} \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow u' + \theta' 2\lambda t \mu_1 = \sqrt{2}\,(u + \theta \lambda t \mu_1) \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow u' = \sqrt{2}\, u \quad \text{και} \quad 2\theta' = \sqrt{2}\,\theta \Rightarrow \theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}\theta.$$

(4)

(2)(α). Για τον ΣΑΠ $U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t - S(t)$ με

$S(t) \sim$ σ Poisson$(\lambda t, F(x))$ με $X_i \sim F(x)$ και $\mu_k = E[X_i^k]$

Θα ισχύει ότι ο συντελεστής προσαρμογής, R. θα ικανοποιεί την εξίσωση $1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$, $M_X(r)$ η ργ των X_i

Άρα $1 + (1+\theta)\mu_1 R = M_X(R)$ (1)

Ζητάμε το θ στις παρακάτω περιπτώσεις.

(a) αν $X_i \sim P[X = \ln 2] = 1$ τότε $\mu_1 = E[X_i] = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2$

και για $R = 1$ έχω $M_X(R) = M_X(1) = Ee^X = P[X = \ln 2]e^{\ln 2} = 2$

Άρα αντικαθιστώ στην (1) και λύνω ως προς θ

$$1 + (1+\theta)\ln 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow \theta = \frac{1-\ln 2}{\ln 2}$$

(β) αν $X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθ. } \frac{1}{4} \\ 2 & \text{'' '' } \frac{3}{4} \end{cases}$ τότε $\mu_1 = E[X_i] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

και για $R = \ln 2$ έχω $M_X(R) = Ee^{X\ln 2} = \frac{1}{4}e^{\ln 2} + \frac{3}{4}e^{2\ln 2}$

$$= \frac{2}{4} + 3 = \frac{14}{4}$$

Αντικαθιστώ στην (1) και λύνω ως προς θ

$$1+(1+\theta)\cdot\frac{7}{4}\cdot\ln 2=\frac{14}{4}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{10-7\ln 2}{7\ln 2}$$

(iii) $X\sim f(x)=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-x}, x\geq 0 \Rightarrow X\sim \text{Gamma}(k,1)$

τότε $\mu_1=EX=k$ και $M_X(r)=\left(\frac{1}{1-r}\right)^k$

άρα για $R=\frac{1}{4}$ έχω $M_X\left(\frac{1}{2}\right)=2^k$

τότε αντικαθιστώ στην (1) $\Rightarrow 1+(1+\theta)\cdot k\cdot\frac{1}{2}=2^k$

$$\Rightarrow \theta=\frac{2^{k+1}-(k+2)}{k}$$

(β) Η προσέγγιση πρώτης τάξης του συντ. προσαρμογής είναι

$R\simeq\frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}$ (προκύπτει από το ανάπτυγμα κατά της συν. $M_X(R)$ σε δυναμοσειρά και κρατάω μόνο τους 2 πρώτους όρους.)

για $X\sim b\left(2,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \mu_1=np=2\cdot\frac{1}{2}=1$ και $\mu_2=E[X^2]=\sigma^2+\mu_1^2$

μετά $\sigma^2=npq=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ άρα $\mu_2=\frac{1}{2}+1^2=\frac{3}{2}$

άρα $R\simeq\frac{2\theta\cdot 1}{3/2}=\frac{4\theta}{3}$.

(γ) Αν $X \sim M_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k$ τότε $\mu_1 = E[X] = M_X'(0)$

Επειδή $M_X'(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^{k-1}$

$\Rightarrow \mu_1 = M_X'(0) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ Υπενθύμιση $\sum_{k=0} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$

Αντικαθιστώ στην εξ. συντ. προσαρμογής για

$\theta = \frac{1}{10}$: $1 + \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot r = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{r}{2}}$, $r < 2$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{11r}{20} = \frac{2}{2-r}$, $r < 2$

$\Leftrightarrow 20(2-r) + 11r(2-r) = 40$

$\Leftrightarrow 11r^2 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ή $\boxed{r_1 = \frac{2}{11} = R}$

Αν $X \sim M_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^k$ γυρεύω το θ αν $R = \frac{2}{11}$

Όμοια $\mu_1 = M_X'(0) = \frac{1}{3}$ και η εξίσωση θα γίνει

$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{r}{3}}$, $r < 3$

Άρα για $r = R = \frac{2}{11}$ έχω $1 + (1+\theta) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{3 - \frac{2}{11}} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2}{31}}$

(α)(i)

3 Έστω ΣΑΠ διακριτού χρόνου 7

α)

$$U_n = u + G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad , \quad G_i \text{ i.i.d.}$$

(α)(i) με $G_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $M_G(r) = e^{r\mu} e^{\frac{r^2\sigma^2}{2}}$

και ο $\tilde{R} > 0$ είναι λύση της $\ln M_G(-r) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-r\mu + r^2\sigma^2/2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2} = 0 \Leftrightarrow r\left(\frac{r\sigma^2}{2} - \mu\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ή } \boxed{r = \frac{2\mu}{\sigma^2} = \tilde{R}}$$

άρα η προσέγγιση είναι ακριβής.

(ii) Έστω ΣΑΠ διακριτού χρόνου με $G_i = c - S_i$ όπου

$S_i \sim$ σ Poisson (λ) τότε $U_n = u + nc - (S_1 + S_2 + \dots + S_n)$

και $M_G(r) = M_{c-S}(r) = E e^{r(c-S)} = e^{rc} E e^{-rS} = e^{rc} M_S(-r)$

$S \sim$ σ Poisson $(\lambda) \Rightarrow M_S(r) = e^{\lambda(M_X(r) - 1)}$

άρα $M_G(-r) = e^{-rc} M_S(r) = e^{-rc} e^{\lambda(M_X(r) - 1)}$

$$= e^{-rc + \lambda(M_X(r) - 1)} \quad \text{και}$$

ο $\tilde{R} > 0$ είναι λύση της

$$\ln M_G(-r) = 0 \Leftrightarrow -rc + \lambda\left(M_X(r) - 1\right) = 0$$

$$\overset{c=(1+\theta)\lambda\mu_1}{\Leftrightarrow} -r(1+\theta)\lambda\mu_1 + \lambda\left(M_X(r)-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$$

άρα $\tilde{R} = \dfrac{2\theta\mu_1}{\mu_2}$ όπως και στο μοντέλο του συνεχούς χρόνου.

β) Αν $G = \begin{cases} -1 & \text{με πιθ. } q \\ n & \text{με πιθ. } qp^{n+1},\ n=0,1,2,\dots \end{cases}$

Τότε $M_G(r) = Ee^{rG} = qe^{-r} + \sum_{n=0}^{\infty} qp^{n+1}e^{rn}$

$$= qe^{-r} + qp\sum_{n=0}^{\infty}(pe^r)^n \qquad pe^r < 1 \Leftrightarrow r < -\ln p$$

$$= qe^{-r} + \frac{qp}{1-pe^r}$$

$$M_G(-r) = qe^r + \frac{qp}{1-pe^{-r}} = qe^r + \frac{qpe^r}{e^r - p} = qe^r\left(1 + \frac{p}{e^r-p}\right)$$

$$M_G(-r) = 1 \Leftrightarrow qe^r\left(1 + \frac{p}{e^r - p}\right) = 1 \overset{p+q=1}{\Leftrightarrow} r = \ln p/q$$

(δ) Αν η $G \sim f(g) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{g}, & g < 0 \\ \frac{1}{3} e^{-g}, & g \geq 0 \end{cases}$ (9)

τότε $M_G(-r) = E e^{-rG} = \int_{-\infty}^{0} e^{-rg} \cdot \frac{1}{3} e^{g} \, dg + \int_{0}^{\infty} e^{-rg} \frac{1}{3} e^{-g} \, dg$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3} e^{g(1-r)} dg + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-g(r+1)} dg$$

$$= \frac{1}{3(1-r)} e^{g(1-r)} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{3(r+1)} \left[-e^{-g(r+1)} \right]_{0}^{+\infty}$$

Επειδή $\lim_{g \to -\infty} e^{g(1-r)} = 0$ για $1-r > 0$

και $\lim_{g \to +\infty} e^{-g(r+1)} = 0$ για $r+1 > 0$ $\Rightarrow -1 < r < 1$

Άρα $r \in (-1, 1) \Rightarrow M_G(-r) = \frac{1}{3(1-r)} - 0 + 0 + \frac{1}{3(r+1)}$

$$\Rightarrow M_G(-r) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-r} + \frac{1}{1+r} \right) = \frac{2}{3(1-r^2)}$$

Άρα $M_G(-r) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3(1-r^2)} = 1 \Leftrightarrow 1 - r^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \sqrt{3}/3}$$

(4) Για τη ΣΑΠ $U(t) = u + ct - S(t)$

όπου $S(t) = \begin{cases} X, & t \geq T \\ 0, & t < T \end{cases}$, T χρόνος να συμβεί

κάλυψη ενός μοναδικού ασφαλιστικού ζημιογόνου γεγονότος,

όπου T = χρόνος χρεοκοπίας $\sim \Phi(t) = P(T \leq t) = \dfrac{t}{t+1}, \ t \geq 0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \Phi'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \ t \geq 0$$

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = \int_0^\infty \left(1 - F_X(u+ct)\right) \varphi(t)\, dt.$$

(α) άρα για $u = 50$, $c = 10$ και $X \sim U(0, 100) \sim F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{100}, & 0 \leq x \leq 100 \\ 1, & x > 100 \end{cases}$

Θα έχουμε $\psi(50) = \displaystyle\int_0^\infty \left(1 - F_X(50+10t)\right) \frac{1}{(t+1)^2}\, dt$

Όμως $0 < 50 + 10t < 100 \Leftrightarrow -5 < t < 5$ και $t > 0$

$\Leftrightarrow 0 < t < 5$ τότε $F_X(50+10t) = \dfrac{50+10t}{100}$

Διαφορετικά για $t \geq 5$ έχω $F_X(50+10t) = 1$.

άρα $\psi(50) = \displaystyle\int_0^5 \left(1 - \frac{50+10t}{100}\right) \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = \frac{1}{10} \int_0^5 \frac{5-t}{(t+1)^2}\, dt$

$z = t+1$, $dz = dt$: $\quad \dfrac{1}{10} \displaystyle\int_1^6 \frac{6-z}{z^2}\, dz = \frac{1}{10} \left[-\frac{6}{z} - \ln z \right]_1^6 = \frac{1}{2} - \ln 6^{1/10}$

(ii) Όμοια αν $Y \sim U(a,b) \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$ (11)

τότε $\psi(u) = \int_0^\infty \left(1 - F_X(u+ct)\right) \varphi(t)\, dt$.

Περιπτώσεις για $u+ct$

για $a < u+ct < b \Leftrightarrow \frac{a-u}{c} < t < \frac{b-u}{c}$ και $t>0$.

I. αν $u \geq a$ τότε $\frac{a-u}{c} \leq 0$ και $\psi(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} \left(1 - \frac{u+ct-a}{b-a}\right) \frac{1}{(t+1)^2}\, dt$

II. αν $u < a$ τότε $\frac{a-u}{c} > 0$ και $\psi(u) = \int_0^{\frac{a-u}{c}} \varphi(t)\, dt + \int_{\frac{a-u}{c}}^{\frac{b-u}{c}} \left(1 - \frac{u+ct-a}{b-a}\right) \frac{1}{(t+1)^2} \ldots$

Όμως για $t < \frac{a-u}{c}$ ... $u+ct<a$ και $F(\ldots) = 0$

Περ. I Αν $u > a$ τότε

$$\psi(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} \frac{b-u-ct}{b-a} \cdot \frac{1}{(t+1)^2}\, dt \overset{z=t+1}{=} \frac{1}{b-a} \int_1^{\frac{b-u}{c}+1} \frac{b-u-c(z-1)}{z^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_1^{\frac{b-u}{c}+1} \left(\frac{b-u+c}{z^2} - \frac{c}{z} \right) dz = \frac{1}{b-a} \left[-\frac{b-u+c}{z} - c\ln z \right]_1^{\frac{b-u}{c}+1}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[-\frac{b-u+c}{\frac{b-u}{c}+1} - c\ln\left(\frac{b-u}{c}+1\right) + b-u+c + 0 \right]$$

$$= \frac{b-u}{b-a} - \frac{c}{b-a} \ln\left(\frac{b-u}{c}+1\right)$$

(1x)

(γ) $X \sim f(x) = 2x, \quad 0 \le x \le 1$. τότε $F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x f(t)\,dt, & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$

άρα $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$ και $0 \le u+ct \le 1 \Leftrightarrow -\frac{u}{c} \le t \le \frac{1-u}{c}$

$$\psi(u) = \int_0^\infty \left(1 - F(u+ct)\right) g(t)\,dt = \int_0^{\frac{1-u}{c}} \left(1-(u+ct)^2\right) \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{1-u}{c}} \frac{1-u^2-2uct-c^2t^2}{(t+1)^2}\,dt \overset{z=t+1}{=}$$

$$= \int_1^{\frac{1-u}{c}+1} \frac{1-u^2-2uc(z-1)-c^2(z-1)^2}{z^2}\,dz$$

$$= \int_1^{\frac{1-u}{c}+1} \frac{1-u^2+2uc-c^2}{z^2} - \frac{2uc+2c^2}{z} - c^2\,dz$$

$$= \frac{1-u^2+2uc-c^2}{-z}\Bigg|_1^{\frac{1-u}{c}+1} - 2c(u+c)\ln z\Bigg|_1^{\frac{1-u}{c}+1} - c^2 z\Bigg|_1^{\frac{1-u}{c}+1} = 1-u^2-2c(1-u)-\ln\left(\frac{c+1-u}{c}\right)$$

13

5 Αν $X \sim \mathcal{E}xp(\beta) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\beta x}, \; x \geq 0$ και $\mu_1 = E[X] = \frac{1}{\beta}$

(α) άρα $f_{L_1}(x) = \frac{1}{\mu_1}\left(1 - F_X(x)\right) = \beta\left(1 - 1 + e^{-\beta x}\right) = \beta e^{-\beta x}$

$\Rightarrow L_1 \sim \mathcal{E}xp(\beta)$

Επίσης, $P(-U(T) > y \mid T < \infty) = P(X > u^* + y \mid X > u^*)$

όπου $u^* = U(T^-)$ = το πλεόνασμα λίγο πριν τη στιγμή T

άρα $P(-U(T) > y \mid T < \infty) = P(X > y) = e^{-\beta y}$

λόγω αμνήμονης ιδιότητας της Exp. Άρα $-U(T) \mid T < \infty \sim \mathcal{E}xp(\beta)$

(β) $M_L(r) = \dfrac{\theta \mu_1 r}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)} = \dfrac{\theta/\beta \cdot r}{1 + \frac{1+\theta}{\beta} r - \frac{\beta}{\beta - r}} =$

$$= \frac{\theta r / \cancel{\beta}}{\dfrac{\beta(\beta - r) + (1+\theta)(\beta - r) r - \beta^2}{\cancel{\beta}(\beta - r)}} =$$

$$= \frac{\theta r(\beta - r)}{-\beta r + (1+\theta)\beta r - (1+\theta) r^2} = \frac{\theta \cancel{r}(\beta - r)}{\cancel{r}(\theta\beta - (1+\theta) r)} =$$

$$= \frac{\theta\beta - \theta r}{\theta\beta - (1+\theta) r}$$

(6)

a) Η σππ. της X είναι η

$$f(x) = \frac{1}{4}(1+x+x^2)e^{-x} = \frac{1}{4}1 e^{-x} + \frac{1}{4}\frac{1^2}{1!}x^{2-1}e^{-x} + \frac{1}{2}\frac{1^3}{2!}x^{3-1}e^{-x}$$

άρα η $X \sim \begin{cases} Exp(1) \equiv X_1 \text{ με πιθ. } \frac{1}{4} \\ Gamma(2,1) \equiv X_2 \text{ με πιθ. } \frac{1}{4} \\ Gamma(3,1) \equiv X_3 \text{ με πιθ. } \frac{1}{2} \end{cases}$ μπορεί να δοθεί ως η

μίξη τριών κατανομών με

$$\mu_1 = E[X] = \frac{1}{4}E[X_1] + \frac{1}{4}E[X_2] + \frac{1}{2}E[X_3]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1} = \frac{9}{4}.$$

$$M_X(r) = E[e^{rX}] = \frac{1}{4}M_{X_1}(r) + \frac{1}{4}M_{X_2}(r) + \frac{1}{2}M_{X_3}(r)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{1-r} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-r}\right)^3$$

Άρα η εξίσωση του σπ R γίνεται για $\theta = 3$

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 9r = \frac{1}{4}\frac{1}{1-r} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-r}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}$$

15

(β) Όμοια αν $X \sim f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, \; x > 0$

τότε $X = \begin{cases} X_1 \sim Exp(1) & \text{με π.θ. } \frac{1}{2} \\ X_2 \sim Exp(2) & \text{με π.θ. } \frac{1}{2} \end{cases}$ μείξη των $Exp(1), Exp(2)$ άρα η $\psi(u)$ έχει τη μορφή $\psi(u)$ $C_1e^{-\rho_1 u}$ C_2

$\psi(u) = C_1 e^{-\rho_1 u} + C_2 e^{-\rho_2 u}$ όπου ρ_1, ρ_2 οι θετικές

λύσεις της εξίσωσης του συντελεστή προσαρμογής

Επειδή $\mu_1 = E[X] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

και $M_X(r) = \frac{1}{2}M_{X_1}(r) + \frac{1}{2}M_{X_2}(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-r} + \frac{2}{2-r}\right)$.

τότε η $1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$ για $\theta = \frac{3}{2}$ γράφεται

$$1 + \left(1 + \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-r} + \frac{2}{2-r}\right)$$

$\Leftrightarrow 2(1-r)(2-r) + \left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{3}{2}r(1-r)(2-r) = 2-r+2(1-r)$

$\Leftrightarrow \cancel{4} - 6r + 2r^2 + \left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{3}{2}r(1-r)(2-r) = \cancel{4} - 3r$

$\Leftrightarrow 2r^2 - 3r + \left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{3}{2}r(1-r)(2-r) = 0$ $\qquad -\frac{45}{4} + \frac{8}{4} =$

$\Leftrightarrow r\left(2r - 3 + \frac{15}{4}(1-r)(2-r)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{15}{4}r^2 - \frac{37}{4}r + \frac{18}{4} = 0$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{2}{3}\ ,\ \rho_2 = \frac{9}{5}.$$

και για τα C_1, C_2 λύνω το γραμμικό σύστημα

$$\psi(0) = C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\frac{C_1}{\rho_1} + \frac{C_2}{\rho_2} = \frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}$$

$$\mu_2 = E[X^2] = \frac{1}{2}EX_1^2 + \frac{1}{2}EX_2^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{5}{8}$$

$$X \sim Exp(\beta) \Rightarrow EX^2 = \frac{2}{\beta^2}.$$

άρα
$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = \frac{2}{5} \\ \frac{3}{2}C_1 + \frac{5}{9}C_2 = \frac{5/\cancel{8}}{\cancel{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{5}{18} \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = \frac{6}{17},\ C_2 = \frac{4}{85}$$

άρα $$\psi(u) = \frac{6}{17}e^{-\frac{2}{3}u} + \frac{4}{85}e^{-\frac{9}{5}u}.$$