# Πιθανότητες και Αναλογισμός

## Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

### Ωφελιμότητα και Ασφάλιστρα

(1) (α) Αν $G$ το ασφάλιστρο τότε από την άποψη του ασφαλιζόμενου θα πρέπει:

$$u(w-G) \geq Eu(w-X)$$

$$\iff 20(w-G)-(w-G)^2 \geq E\left[20(w-X)-(w-X)^2\right]$$

$w=10$

$$\iff 100-G^2 \geq 100-E[X^2]$$

$$\iff G^2 \leq E[X^2]$$

όπου $E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2\,dx = \frac{3}{5}$.

άρα $G \leq \sqrt{E[X^2]} = \sqrt{\frac{3}{5}} = G_{max}$

Το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από τον ασφαλιζόμενο είναι

$$G_{max} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.775.$$

(β) Αν $H$ το ασφάλιστρο της εταιρείας τότε από την άποψη του ασφαλιστή θα πρέπει:

$$u_I(w_0) \leq Eu_I(w_0+H-X)$$

$$\iff 1-e^{-w_0} \leq E\left[1-e^{-w_0+H-X}\right]$$

$$\iff 1-e^{-w_0} \leq 1-e^{-w_0}e^{-H}E[e^{-X}]$$

$$\iff 1 \geq e^{-H}M_X(1)$$, όπου $M_X(t)=E[e^{tX}]$ η ροπογεννήτρια της $X$

$\overset{\log}{\iff}$ $H \geq \log M_X(1)$

με $M_x(1) = E[e^X] = \int_0^1 e^x 3x^2 dx = 3e^x(x^2-2x+2)\Big|_0^1$
$= 3(e-2)$

άρα $H \geq \log[3(e-2)]$

Το ελάχιστο αποδεκτό ασφάλιστρο της εταιρείας είναι

$H_{min} = \log 3(e-2) \simeq 0.768$

γ) $\mu = E(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

άρα $G_{max} \geq H_{min} > \frac{3}{4} = 0.75$.

και άρα υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική

με ασφάλιστρο $G \in [H_{min}, G_{max}] = [0.768, 0.775]$

(2) (α) Για ασφάλιστρο $G = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$ ζητάμε το

$d$ ώστε να ισχύει

Αναμ. ωφέλεια με κάλυψη $I_d(X)$ = Αναμ. ωφέλεια χωρίς κάλ.

$\Leftrightarrow \quad E\,u(w - G - (X - I_d(X))) = E\,u(w - X)$

$\Leftrightarrow \quad E[1 - \exp(-2(w - G - (X - I_d(X))))] = E[1 - \exp(-2(w-X))]$

$\Leftrightarrow \quad 1 - e^{-2w} e^{2G} E[e^{2(X - I_d(X))}] = 1 - e^{-2w} E[e^{2X}]$

$\overset{\log}{\Leftrightarrow} \quad G = \frac{1}{2} \log \frac{E[e^{2X}]}{E[e^{2(X - I_d(X))}]} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad E[e^{2(X - I_d(X))}] = \frac{2}{3} E e^{2X} = \frac{2}{3} M_X(2) \quad (*)$

$\mu = M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{4}{4-t}$, $t<4$ αφού $X \sim Exp(4)$

άρα $M_X(2) = \frac{4}{2} = 2$

και, η τ.μ. $Y = X - I_d(X) = X - \max\{0, X-d\} = X + \min\{0, d-X\}$

$= \min\{X, d\}$

άρα $E[e^{2Y}] = E[e^{2\min\{X,d\}}] = \int_0^\infty e^{2\min(x,d)} 4e^{-4x}dx$

$$\overset{d>0}{=} \int_0^d e^{2x} 4e^{-4x}dx + \int_d^\infty e^{2d} 4e^{-4x}dx$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^d 2e^{-2x}dx + e^{2d}\int_d^\infty 4e^{-4x}dx$$

$$= 2\cdot\left[-e^{-2x}\right]_0^d + e^{2d}\left[-e^{-4x}\right]_d^\infty$$

$$= 2\left(1-e^{-2d}\right) + e^{2d}\cdot\left(0+e^{-4d}\right) = 2 - e^{-2d}$$

άρα αντικαθιστώ στην (*) και έχω

$$2 - e^{-2d} = \frac{2}{3}\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} \quad (= G \simeq 0.2027)$$

(β) $P\left(\text{ασφαλιζόμενος να πληρώσει } G > I_d(X)\right)$ με $d = G$)

$= P\left(I_d(X) < d\right) = P\left(\max\{0, X-d\} < d\right)$

$= P\left(X - d < d\right) = P\left(X < 2d\right) = P\left(X < \log\frac{3}{2}\right)$

$= F_X\left(\log\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-4\cdot\log\frac{3}{2}} = 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{65}{81} \simeq 0.802$

γιατί $X \sim \mathcal{E}xp(4)$ άρα $F_X(x) = 1 - e^{-4x}$, $x \geq 0$.

(γ) κέρδος εταιρείας $= G - I_d(X)$

$$E[\text{κέρδος}] = E\left[G - I_d(X)\right] \overset{G=d}{=} d - E\left[I_d(X)\right]$$

με $E\left[I_d(X)\right] = \int_0^\infty \max\{0, x-d\}\, 4e^{-4x}\, dx =$

$$= \int_d^\infty (x-d)\, 4e^{-4x}\, dx \overset{y=x-d}{=} \int_0^\infty y \cdot 4e^{-4(y+d)}\, dy$$

$$= e^{-4d} \int_0^\infty y\, 4e^{-4y}\, dy = e^{-4d} \cdot \frac{1}{4}$$

γιατί $E\left[\mathcal{E}xp(4)\right] = \frac{1}{4}$

άρα $E[\text{κέρδος}] \overset{d=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}}{=} \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{4} e^{-4\cdot\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{4} e^{\log\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{9} \simeq 0.092$$

(3) α) Θέλουμε οριακή κάλυψη έναντι του κινδύνου $X = X_1 + X_2$

όπου $X_1 \sim f_{X_1}(x) = xe^{-x}, x>0$ δηλ. $X_1 \sim Gamma(2,1)$

$X_2 \sim f_{X_2}(x) = e^{-x}, x>0$ δηλ. $X_2 \sim Exp(1)$

Από αρχή αναμενόμενης χρησιμότητας για αποστρεφόμενο ασφαλιστή G έχω:

$$u(w-G) \ge E u(w-X)$$

$u(w) = 5 - e^{-w/10}$

$$\iff 5 - e^{-\frac{w-G}{10}} \ge E\left[5 - e^{-\frac{w-X}{10}}\right]$$

$$\iff 5 - e^{-\frac{w-G}{10}} \ge 5 - e^{-w/10} E e^{X/10}$$

$$\iff e^{G/10} \le M_X\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\iff G \le 10 \ln M_X\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$M_X\left(\frac{1}{10}\right) = M_{X_1+X_2}\left(\frac{1}{10}\right) \overset{X_1, X_2 \text{ ανεξ}}{=} M_{X_1}\left(\frac{1}{10}\right) \cdot M_{X_2}\left(\frac{1}{10}\right)$$

Για $X_1 \sim Gamma(2,1) \Rightarrow M_{X_1}(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2, \ t<1$

Για $X_2 \sim Exp(1) \Rightarrow M_{X_2}(t) = \frac{1}{1-t}, \ t<1$

$M_X(t) = M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^3, \ t<1$

άρα $M_X\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right)^3 = \left(\frac{10}{9}\right)^3$

και $G_{max} = 10 \ln\left(\frac{10}{9}\right)^3 = 30 \ln\left(\frac{10}{9}\right) \simeq 3.16$

(β) Ο ασφαλιστής έχει συνάρτηση ως $u_I(w) = 3 - e^{-w/20}$

Άρα οριακό για οριακή κάλυψη του $X' = X_1 + X_2$ θα ισχύει αφού την απόδειξη του ασφαλιστή ότι

$$M H_{min} = 20 \ln M_X\left(\frac{1}{20}\right) = 20 \ln \left(\frac{1}{1-\frac{1}{20}}\right)^3 = 60 \ln \frac{20}{19}$$

$$\Rightarrow H_{min} \approx 3.08$$

οπότε υπάρχει επιλεκτική ασφαλιστική πολιτική με

αποδεκτό ασφάλιστρο $G \in [3.08, 3.16]$

(β) Εδώ θεωρούμε μόνο το δεύτερο κίνδυνο $X_2 \sim Exp(1)$

Στη περίπτωση μία ασφαλιστική πολιτική μερικής κάλυψης την $I_d(X) = \max\{0, X-d\}$

για ασφάλιστρο $G = \frac{10}{9} \ln\left(\frac{10}{9}\right)^{1/2}$ πώς βρίσκουμε το $d$

ώστε $$E[u(w-X_2)] = E[u(w-G-(X_2-I_d(X_2)))]$$

αναμενόμενη ωφέλεια χωρίς κάλυψη — αναμενόμενη ωφέλεια με κάλυψη.

άρα $$E\left[5 - e^{-\frac{w-X_2}{10}}\right] = E\left[5 - e^{-\frac{w-G-(X_2-I_d(X_2))}{10}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad E e^{X_2/10} = e^{G/10} \cdot E e^{\frac{X_2-I_d(X_2)}{10}}$$

$X_2 - I_d(X_2)$

$$M_{X_2}\left(\frac{1}{10}\right) = e^{G/10} E\left[e^{\frac{\min\{X_2, d\}}{10}}\right]$$

γιατί $X_2 - I_d(X_2) = X_2 - \max\{0, X_2-d\} = X_2 + \min\{0, d-X_2\}$

$= \min\{X_2, d\}$

$$\cdot\ M_{X_2}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

$$\cdot\ e^{G/10} = e^{\frac{1}{9}\log\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}} = \left(\frac{10}{9}\right)^{1/18}$$

$$\cdot\ E e^{\frac{\min\{X_2, d\}}{10}} = \int_0^\infty e^{\frac{\min\{x,d\}}{10}} \cdot f_{X_2}(x)\,dx =$$

$$= \int_0^d e^{\frac{x}{10}} e^{-x}\,dx + \int_d^\infty e^{d/10} \cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \int_0^d e^{-\frac{9x}{10}}\,dx + e^{d/10} \cdot e^{-d}$$

$$= \left[-\frac{10}{9}e^{-\frac{9x}{10}}\right]_0^d + e^{-\frac{9d}{10}} = -\frac{10}{9}e^{-\frac{9d}{10}} + \frac{10}{9} + e^{-\frac{9d}{10}}$$

$$= \frac{10}{9} - \frac{1}{9}e^{-\frac{9d}{10}}$$

Αντικαθιστώ και έχω,

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{18}} \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9}e^{-\frac{9d}{10}}\right) = \frac{10}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9} - \frac{1}{9}e^{-\frac{9d}{10}} = \left(\frac{10}{9}\right)^{17/18}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{9d}{10}} = 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^{17/18}\right)$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{10}{9}\log\left(10 - 9\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{17/18}\right) \simeq 1.3714$$

(4) (α) Έστω $G$ το ανώτατο ασφάλιστρο όπως δίνεται

τότε ικανοποιεί την ανισωση του ασφαλιζομένου άρα

$$u(w-G) \geq E\,u(w-X) = E\,u(w-g(Y))$$

$u(w)=\sqrt{w}$, $w=9$ $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{9-G} \geq E\left[\sqrt{9-g(Y)}\right]$$

με $E\left[\sqrt{9-g(Y)}\right] = \int_0^8 \sqrt{9-g(y)} \cdot \frac{1}{8}\,dy$ γιατί $Y \sim U(0,8)$ άρα $f_Y(y) = \frac{1}{8}$, $0 \leq y \leq 8$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-0}\cdot\frac{1}{8}\,dy + \int_3^8 \sqrt{9-(y-3)}\,\frac{1}{8}\,dy = \frac{1}{8}\,3y\Big|_0^3 + \frac{1}{8}\int_3^8 \sqrt{12-y}\,dy$$

$\sqrt{12-y}=t$, $-\frac{1}{2\sqrt{12-y}}\,dy = dt$

$$= \frac{9}{8} + \frac{1}{8}\int_2^3 t\cdot 2t\,dt = \frac{9}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}t^3\Big|_2^3 = \frac{38}{3}$$

άρα $\sqrt{9-G} \geq \frac{38}{3} \Rightarrow G \leq 9-\left(\frac{65}{24}\right)^2 \simeq 1.665$

|| $G_{max}$

Άρα $G_{max} \simeq 1.665$

(β) $W_0 = 100$, $u_I(w_0) = 1-e^{-w_0/20}$ εκθετική ω.σ. με $\beta = \frac{1}{20}$

άρα $H_{min} = \frac{1}{\beta}\log M_X(\beta) = 20\log M_X\left(\frac{1}{20}\right)$ όπου

$M_X(t)$ η ροπογεννήτρια της τ.μ. $X$ και είναι

$$M_X\left(\frac{1}{20}\right) = E\,e^{X/20} = E\,e^{g(Y)/20} = \int_0^8 e^{g(y)/20}\cdot\frac{1}{8}\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^3 e^0\,dy + \frac{1}{8}\int_3^8 e^{\frac{y-3}{20}}\,dy \qquad \frac{y-3}{20}=t,\quad \frac{dy}{20}=dt$$

$$= \frac{1}{8}(3-0) + \frac{1}{8}\int_0^{1/4} e^t\, 20\,dt$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{5}{2}\cdot e^t\Big|_0^{1/4} = \frac{3+20(e^{1/4}-1)}{8}$$

άρα $H_{min} = 20 \log \frac{20e^{1/4}-17}{8} \simeq 1.633$

$$\mu = E[X] = E[g(Y)] = \int_0^3 0\cdot\frac{1}{8}\,dy + \int_3^8 (y-3)\frac{1}{8}\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\frac{(y-3)^2}{2}\Big|_3^8$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{25}{2}-0\right) = \frac{25}{16} \simeq 1.5625$$

άρα $G_{max} \geq H_{min} \geq \mu$

άρα υπάρχει εφικτό ασφαλιστικό πρόγραμμα με ασφάλιστρο

$$G \in [H_{min}, G_{max}] = [1.633,\ 1.665]$$

(γ) κέρδος εταιρείας $= G_{max} - X \Rightarrow E[\text{κέρδος}] = E[G_{max}-X]$

$$= G_{max} - \mu = 1.665 - 1.5625 \simeq 0.1 \text{ εκατ.€}$$

$P(\text{να ζημιωθεί η εταιρεία}) = P(X > G_{max}) =$

$$P(\max\{0, Y-3\} > G_{max}) = P(Y-3 > G_{max}) = P(Y > G_{max}+3)$$

$$= 1 - P(Y \leq G_{max}+3) = 1 - F_Y(G_{max}+3) = 1 - \frac{G_{max}+3-0}{8-0} = 0.42$$

5

(α) Για $G = 100$ και πολλαπλασιαστική αρχή καθαρού ασφαλίστρου
$G = (1+\theta)\, E[I(X)]$ για μερική κάλυψη $I(X) = I_d(X)$
και $\theta = 25\%$.

Πρέπει. $1.25 \cdot E[I_d(X)] = 100$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \cdot E[\max\{0, X-d\}] = 100$

$\Leftrightarrow E[\max\{0, X-d\}] = 80$

$\Leftrightarrow \int_0^{1000} \max(0, x-d) \cdot \frac{1}{1000}\, dx = 80$

$\Leftrightarrow \int_0^{1000} \max(0, x-d)\, dx = 80000$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} \int_d^{1000} (x-d)\, dx = 80000 \overset{t=x-d}{\Leftrightarrow} \int_0^{1000-d} t\,dt = 80000$

$\Leftrightarrow \frac{(1000-d)^2}{2} = 80000 \Leftrightarrow \boxed{d = 600}$ ή $d = 1400$ απορρ.

* αν $x - d < 0 \Leftrightarrow \underline{x < d}$ τότε $\max(0, x-d) = 0$

αν $x - d > 0 \Leftrightarrow x > d$ τότε $\max(0, x-d) = x - d$

(β) Όμοια πρέπει για $I(X) = I_p(X) = p \cdot X$

$1.25\, E[I_p(X)] = 100 \Leftrightarrow E[pX] = 80 \Leftrightarrow p \cdot E[X] = 80$

με $E[X] = \frac{1000+0}{2} = 500$ γιατί $X \sim U(0, 1000)$

άρα $p = \frac{80}{500} = 0.16$

(γ) Θα πρέπει να συγκρίνω τις αναμενόμενες ωφέλειες

(i) χωρίς κάλυψη $Eu(w-X)$

(ii) με μερική κάλυψη $I_d(X)$, $d=600$. δηλ $Eu(w-100-(X-I_{400}(X)))$

(iii) " " " $I_p(X)$, $p=0{,}16$ δηλ $Eu(w-100-(X-I_{0{,}16}(X)))$

Για το (i): $Eu(w-X) = E\left(1-e^{-\frac{w-X}{1000}}\right) = 1-e^{-\frac{w}{1000}}\cdot Ee^{\frac{X}{1000}}$

$$= 1-e^{-w/1000}\cdot M_X\left(\tfrac{1}{1000}\right) = 1-e^{-w/1000}(e-1)$$

με $X\sim U(0,1000) \Rightarrow M_X(t)=\frac{e^{1000t}-1}{t\cdot 1000}$ άρα $M_X\left(\frac{1}{1000}\right) = \frac{e-1}{1} = e-1$

Για το (ii): $Eu(w-100-(X-\max\{0,X-400\})) =$

$$= 1-e^{-w/1000}e^{\frac{1}{10}}\, E\left[\exp\left\{\frac{\min(X,400)}{1000}\right\}\right]$$

$$= 1-e^{-w/1000}\cdot e^{1/10}\left(\int_0^{600} e^{x/1000}\cdot\frac{1}{1000}\,dx + e^{0.6}\int_{600}^{1000}\frac{1}{1000}\,dx\right)$$

$$= 1-e^{-w/1000}\cdot e^{1/10}\cdot\left(e^{0.6}-1+0{,}4e^{0.6}\right)$$

$$= 1-e^{-w/1000}\cdot e^{1/10}\cdot\left(1.4e^{0.6}-1\right)$$

Για το (iii): $Eu(w-100-(X-0.16X)) = Eu(w-100-0.84X)$

$$= 1-e^{-w/1000}e^{1/10}\cdot e^{0.84X/1000}$$

$$= 1-e^{-w/1000}e^{1/10}\cdot M_X\left(\frac{0.84}{1000}\right)$$

$$= 1-e^{-w/1000}e^{1/10}\cdot\frac{e^{0.84}-1}{0.84}$$

άρα αν $\alpha = e - 1 \simeq 1.71828$

$$\beta = e^{\frac{1}{10}}\left(1.4e^{0.6} - 1\right) \simeq 1.71406$$

$$\gamma = e^{1/10}\,\frac{e^{0.84-1}}{0.84} \simeq 1.7319$$

τότε $\beta < \alpha < \gamma \Rightarrow 1 - e^{-\frac{w}{1000}}\cdot\beta > 1 - e^{-w/1000}\cdot\alpha >$
$1 - e^{-w/1000}\gamma$

άρα πιθανότητα$(\beta)$ > πιθανότητα $(\alpha)$ > πιθανότητα $(\gamma)$

δηλ $I_{600}$ > χωρίς τεστ > $I_{0.16}$

(6) Ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο $w=5$

ως $u(w)=\sqrt{w}$, $w>0$

επιθυμεί ολική κάλυψη έναντι κινδύνου

$$X \sim f_X(x) = \frac{2}{25}(5-x), \quad 0 \le x \le 5.$$

(α) Από εξίσωση ασφαλιζόμενου για αποδεκτό ασφάλιστρο $G$ έχω

$$u(w-G) \ge E u(w-X)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{5-G} \ge E\left[\sqrt{5-X}\right]$$

με $E\left[\sqrt{5-X}\right] = \int_0^5 \sqrt{5-x} \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^5 \sqrt{5-x} \cdot \frac{2}{25}(5-x)\,dx$

$$\underset{du=-dx}{\overset{u=5-x}{=}} \int_0^5 \frac{2}{25} \cdot u^{3/2}\,du = \frac{2}{25} \cdot \left[\frac{u^{5/2}}{5/2}\right]_0^5 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Άρα $\sqrt{5-G} \ge \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow G \le 5 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}$

άρα $G_{max} = 1.8$ και $E[G_{max} - X] = 1.8 - E[X]$

με $E[X] = \int_0^5 x f(x)\,dx = \int_0^5 x \frac{2}{25}(5-x)\,dx =$

$$= \frac{2}{25}\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 \simeq 1.66.$$

άρα $E[\text{κέρδος}] = 1.8 - E[X] \simeq 0.14$

(β) Ασφαλιστής με ΣΩ $u_I(w) = 2 - \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}w}$, $w > 0$

(εκθετική) οπότε το ελάχιστο ασφάλιστρο της $X$

το $H_{min} = \frac{5}{3} \ln M_X\left(\frac{3}{5}\right)$

$$M_X(t) = E e^{tX} = \int_0^5 e^{tx} \frac{2}{25}(5-x)\, dx = \dots$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{25} \cdot \frac{e^3 - 1}{9/25} \simeq 3.57$$

(γ) Για $I_d(X) = \max\{0, X-d\}$ έχω

$$E[I_d(X)] = \int_0^5 \max\{0, x-d\} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^d 0 \cdot f(x)\, dx + \int_d^5 (x-d) \frac{2}{25}(5-x)\, dx$$

$$\overset{\substack{u = 5-x \\ du = -dx}}{=} \int_0^{5-d} u \cdot \frac{2}{25}(5-d-u)\, du =$$

$$= \left[\frac{2}{25}(5-d)\frac{u^2}{2} - \frac{2}{25}\frac{u^3}{3}\right]_0^{5-d}$$

$$= \frac{2}{25}\frac{(5-d)^3}{2} - \frac{2}{25}\frac{(5-d)^3}{3} = \frac{(5-d)^3}{75}.$$

Για $P = 9/25$ αποδεικνύεται $E[I_d(X)] = P \iff d = 2$.

(7) (α) Όπως στις ασκήσεις 5 και 6

$$EI_d(X) = \frac{5}{6}\cdot G = \frac{5}{6}\cdot 34,2 = 28.5$$

Εδώ η τ.μ. $X \sim$ ομοιόμορφη διακριτή $f(x) = \frac{1}{100} = P(X=x)$

$X \in \{1,2,\dots,100\}$

Έστω ότι $d \in \{1,\dots,100\}$ τότε

$$EI_d(X) = E\max\{0, X-d\} = \sum_{x=d+1}^{100}(x-d)\frac{1}{100} = \frac{1}{100}\sum_{x=1}^{100-d} x$$

$$= \frac{1}{100}\cdot\frac{(100-d)(101-d)}{2} = \frac{(100-d)(101-d)}{200}$$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ άρα $\frac{(100-d)(101-d)}{200} = 28.5$

$\Leftrightarrow d^2 - 201d + 4400 = 0$

$\Leftrightarrow d = \frac{201 \pm 151}{2}$ $50/2 = 25$ ή $\frac{352}{2} > 100$ απορ.

άρα $d = 25$

(β) $P$(να χρεωκοπήσει η εταιρεία) $= P(I_d(X) > G)$

$= P(\max(0, X-25) > 34.2) = P(X-25 > 34,2) = P(X > 59,2)$

$= P(X \geq 60) = \sum_{x=60}^{100} P(X=x) = \sum_{x=60}^{100}\frac{1}{100} = \frac{41}{100} = 0.41$

(γ) $E[\text{κέρδος}] = E[G - I_d(X)] = 34.2 - E[I_d(X)] = 34.2 - 28.5$

$= 5.7$