

Πιθανότητες και Αναλογισμός
4^η Σειρά Ασκήσεων – Δεκέμβριος 2018
Ανατοκισμός - Ράντες

1. Μία αντιπροσωπεία αυτοκινήτων έχει ένα πρόγραμμα χρηματοδότησης για την αγορά νέου αυτοκινήτου με αποπληρωμή της αξίας του αυτοκινήτου σε 60 ισόποσες προκαταβαλλόμενες μηνιαίες δόσεις με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 8%.
 - (α) Αν ένας πελάτης αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 20000 Ευρώ σύμφωνα με το παραπάνω πρόγραμμα χρηματοδότησης, τότε να βρεθεί η ονομαστική αξία της δόσης R .
 - (β) Αν ο ίδιος πελάτης πληρώσει κανονικά τις πρώτες 24 δόσεις, αλλά δε μπορέσει να καταβάλει τις δόσεις υπ' αριθμόν 25, ..., 36, και μόνο για το διάστημα αυτό η Τράπεζα του επιβάλλει επιπρόσθετο μηνιαίο επιτόκιο 0.3%, τότε ποιό θα είναι το ποσό που θα οφείλει στη λήξη του 36^{ου} μήνα; Ποια θα πρέπει να είναι η νέα μηνιαία δόση R' που θα πρέπει να καταβάλει ως τη λήξη του δανείου ώστε να αποπληρώσει το αυτοκίνητο στη συμφωνημένη λήξη;
2. Ένας φορολογούμενος απευθύνεται στην εφορία για τη ρύθμιση οφειλής ύψους 20000 ευρώ σε ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Σύμφωνα με το τελευταίο νόμο, η οφειλή του μπορεί να ρυθμιστεί σε 40 ληξιπρόθεσμες μηνιαίες δόσεις με σταθερό επιτόκιο 6% το χρόνο. Επίσης στη περίπτωση που δε μπορέσει να καταβάλλει κάποια δόση, τότε επιβάλλεται επιπρόσθετο μηνιαίο επιτόκιο 0.5% σε κάθε δόση που δεν καταβάλλεται.
 - (α) Να υπολογιστεί η ονομαστική αξία της δόσης R που θα καταβάλλει ο φορολογούμενος, αν είναι συνεπής με τη συμφωνηθείσα ρύθμιση.
 - (β) Στη περίπτωση που δεν πραγματοποιήσει καταβολές μετά τη λήξη της 30ης δόσης, τότε ποιό θα είναι το ποσό που θα οφείλει στη λήξη του 40ου μήνα;
 - (γ) Επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β), αν ο φορολογούμενος αποπληρώνει σε 40 ισόποσες συνεχώς καταβαλλόμενες μηνιαίες δόσεις με σταθερό επιτόκιο 6% το χρόνο.
3. Κατάστημα ηλεκτρικών ειδών πουλάει επαγγελματικό εξοπλισμό αξίας 10000 Ευρώ με τη συμφωνία να το αποπληρώσει σε 40 ισόποσες μηνιαίες ληξιπρόθεσμες δόσεις σταθερού ετήσιου επιτοκίου 6%.
 - (α) Να βρεθεί η ονομαστική αξία της μηνιαίας δόσης R .
 - (β) Αν ο αγοραστής του εξοπλισμού επιθυμεί για τους πρώτους 20 μήνες να πληρώνει διπλάσια δόση από ότι τους τελευταίους 20, πως θα διαμορφωθεί τότε η δόση για τους πρώτους 20 μήνες;
 - (γ) Αν ο αγοραστής του εξοπλισμού επιθυμεί για τους πρώτους 20 μήνες να πληρώνει τη μισή δόση από ότι τους τελευταίους 20, πως θα διαμορφωθεί τότε η δόση για τους πρώτους 20 μήνες;
4. Δανειολήπτης λαμβάνει επταετές δάνειο κεφαλαίου 7000 Ευρώ με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 6% το οποίο θα αρχίσει να αποπληρώνεται σε ισόποσες μηνιαίες ληξιπρόθεσμες πληρωμές αφού συμπληρωθούν τα πρώτα 2 έτη από τη λήψη του, και, συγκεκριμένα:

τους πρώτους 24 μήνες δε πληρώνεται καμμία δόση, τους επόμενους 12 μήνες θα πληρώνονται μόνο οι τόκοι, και, τους τελευταίους 48 μήνες θα αποπληρώνεται και το κεφάλαιο σε ισόποσες μηνιαίες ληξιπρόθεσμες δόσεις ύψους R .

Θεωρώντας ανατοκιστική περίοδο τον ένα μήνα σε όλη τη διάρκεια της επταετίας (δηλαδή και στους πρώτους 24 μήνες), να βρεθεί το ύψος της δόσης R , καθώς και το ύψος των 12 μηνιαίων καταβολών που καταβάλλει μόνο τους τόκους (δόσεις 25-36).
5. Τα ετήσια επιτόκια I_1, I_2, \dots, I_n για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. καθένα με πυκνότητα $f(i) = 200i, 0 < i < \frac{1}{10}$.

- (α) Να βρεθεί η πυκνότητα $g(\delta)$ των αντίστοιχων εντάσεων ανατοκισμού $\Delta_j = \log(1 + I_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- (β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας αξίας μίας μονάδας μετά από n έτη.
- (γ) Να βρεθεί η μέση συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων για μοναδιαίες καταβολές.
6. Οι τυχαίες ετήσιες εντάσεις ανατοκισμού για τα επόμενα n έτη $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. από την $U(0, \frac{1}{10})$, δηλ. με πυκνότητα $g(\delta) = 10$, $0 < \delta < \frac{1}{10}$.
- (α) Να βρεθεί η πυκνότητα $f(i)$ των αντίστοιχων τυχαίων ετήσιων επιτοκίων $I_j = \exp(\Delta_j) - 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- (β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας αξίας μίας μονάδας μετά από n έτη.
- (γ) Να βρεθεί η μέση συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων για μοναδιαίες καταβολές.
7. Τα ετήσια επιτόκια I_1, I_2, \dots, I_n για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. καθένα με πυκνότητα $f(i) = 12000i^2(1 - 10i)$, $0 < i < \frac{1}{10}$.
- (α) Να βρεθεί η πυκνότητα $g(\delta)$ των αντίστοιχων εντάσεων ανατοκισμού $\Delta_j = \log(1 + I_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- (β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας αξίας μίας μονάδας μετά από n έτη.
- (γ) Να βρεθεί η μέση συσσωρευμένη αξία της προκαταβαλλόμενης ράντας n περιόδων για μοναδιαίες καταβολές.

Επιμέλεια Ασκήσεων: Γιάννης Δημητρακόπουλος