Πιθανότητες και Αναλογισμός

2^η Σειρά Ασκήσεων – Νοέμβριος 2018

Ατομικό και Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου

1. Στο συλλογικό μοντέλο κινδύνου μίας περιόδου, όπου $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ η συνολική ζημιά της εταιρείας, το πλήθος ζημιών δίνεται από την τ.μ. $N \sim \text{Geom}(\frac{1}{3})$ και είναι στοχαστικά ανεξάρτητη των τυχαίων ανεξάρτητων ατομικών ζημιών $X_i \sim b(\frac{1}{4})$ (Bernoulli). Να βρεθούν:

   (α) Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. S.

   (β) Η $E[S]$ και η $Var[S]$ της συνολικής ζημιάς S.

   (γ) Οι ακέραιες τιμές του $k \in \mathbf{Z}$ ώστε η

$$P(S \leq (1+k)E[S]) = P(S \leq E[S] + kVar[S]) = \frac{26}{27}.$$

2. Έστω $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ η συνολική ζημιά της εταιρείας, με τυχαίο πλήθος ζημιών που δίνεται από την τ.μ. N με συνάρτηση πιθανότητας $P(N=0) = P(N=\alpha) = P(N=2\alpha) = \frac{1}{3},\ \alpha \in \{1, 2, \ldots\}$, και είναι στοχαστικά ανεξάρτητη των ατομικών ζημιών που δίνονται από τις ανεξάρτητες τ.μ. $X_i,\ i = 1, 2, \ldots \sim \Gamma(\frac{1}{\alpha}, b)$ (Γάμμα).

   (α) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της τ.μ. S, $M_S(t) = E\left[e^{tS}\right]$ για τα t που ορίζεται και να δείξετε ότι η κατανομή της S δεν εξαρτάται από τη παράμετρο α.

   (β) Να βρεθεί η $E[S]$ και η $Var[S]$ της συνολικής ζημιάς S.

   (γ) Εξετάστε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Κ.Ο.Θ. καθώς $\alpha \to \infty$.

3. Στο συλλογικό μοντέλο κινδύνου μίας περιόδου, η συνολική ζημιά της εταιρείας δίνεται από την $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, όπου η τ.μ. $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ εκφράζει το πλήθος ζημιών και είναι στοχαστικά ανεξάρτητη των τυχαίων ανεξάρτητων ατομικών ζημιών $X_i,\ i = 1, 2, \ldots$ οι οποίες έχουν συνάρτηση πιθανότητας $P(X_i = x) = \frac{x^2}{30},\ x = 1, 2, 3, 4\ (i = 1, 2, \ldots)$. Αν $E[S] = 12$, να βρείτε:

   (α) τη σταθερά λ, και

   (β) τη διακύμανση, $Var[S]$, της συνολικής ζημιάς S.

4. Η συνολική αποζημίωση που θα καταβάλει μία εταιρεία που καλύπτει δύο κατηγορίες κινδύνων είναι

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{N_1} X_i + \sum_{j=1}^{N_2} Y_j,$$

   όπου οι τυχαίες μεταβλητές $N_1,\ N_2,\ X_i, i \geq 1,\ Y_j, j \geq 1$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

   Συγκεκριμένα, οι τ.μ. $N_1,\ N_2$ είναι Poisson με παραμέτρους ν και 2ν, αντίστοιχα, ενώ οι τυχαίες ζημιες της πρώτης κατηγορίας έχουν συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{3},\ x = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, \ldots (\text{δηλ. } X_i \sim U\{1, 2, 3\}),$$

   και οι τυχαίες ζημιές της δεύτερης κατηγορίας έχουν συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{Y_j}(y) = \theta e^{-\theta y}, y > 0,\ j = 1, 2, \ldots (\text{δηλ. } Y_j \sim Exp(\theta)).$$

   Οι τυχαίες ζημιές κάθε κατηγορίας είναι επίσης ανεξάρτητες και οι παράμετροι ν και θ είναι γνωστές θετικές σταθερές. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η εταιρεία λαμβάνει ασφάλιστρο ίσο με 4 για τη κάλυψη κάθε ζημιάς μεγέθους $X_i,\ i = 1, \ldots, N_1$ και ίσο με 3 για τη κάλυψη κάθε ζημιάς $Y_j,\ j = 1, \ldots, N_2$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνολική αποζημίωση S_ν είναι σύνθετη $\text{Poisson}(\lambda, F(x))$ και προσδιορίστε τη σταθερά λ και τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$ των ατομικών ζημιών.

(β) Αποδείξτε ότι το καθαρό κέρδος της εταιρείας, επίσης ακολουθεί σύνθετη Poisson κατανομή και να βρείτε το μέσο κέρδος της εταιρείας καθώς και τη διασπορά του κέρδους, συναρτήσει των παραμέτρων ν και θ.

(γ) Για $\theta = \frac{1}{4}$ να υπολογίσετε κατά προσέγγιση (για $\nu \to \infty$) την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία.

Σημείωση: Στο ερώτημα **(γ)** να αιτολογηθεί λεπτομερώς η ισχύς του θεωρήματος που θα χρησιμοποιήσετε για να υπολογίσετε τη συγκεκριμένη πιθανότητα.

5. Τα ποσά (σε χιλ. ευρώ) για τις ατομικές ζημιές που πρέπει να καταβάλει μία εταιρεία στη διάρκεια του επόμενου έτους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες εκθετικές τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ με παράμετρο 1, ενώ το πλήθος τους είναι επίσης τ.μ., η N_ν που ακολουθεί αρνητική διωνυμική με παραμέτρους $r = \nu > 0$ και $p = \frac{1}{2}$, δηλ. με συνάρτηση πιθανότητας την

$$P\left(N_\nu = n\right) = \left(\begin{array}{c} \nu + n - 1 \\ n \end{array} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu + n}, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Αν $S_\nu = S_{N_\nu} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_\nu}$ η συνολική αποζημίωση που θα πληρώσει η εταιρεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, να βρεθούν:

(α) η ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν.

(β) η $E\left[S_\nu\right]$ και η $Var\left[S_\nu\right]$ της συνολικής ζημιάς S_ν.

(γ) Αν το συνολικό αποθεματικό της εταιρείας για τη κάλυψη των ζημιών αυτού του χαρτοφυλακίου είναι $w = 10^3$ (χιλιάδες ευρώ) και οι αναλογιστές έχουν υπολογίσει την παράμετρο σε $\nu = 1000$, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα $P\left(S_{1000} > 1000\right)$ δηλαδή την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία από αυτό το χαρτοφυλάκιο.

Σημείωση: Για το **(γ)** ερώτημα να αναφέρετε όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος που θα χρησιμοποιήσετε για να υπολογίσετε τη συγκεκριμένη πιθανότητα και να ελεγχθεί η ισχύς τους.

6. Υποθέτουμε ότι η S_1 είναι σύνθετη αρνητική διωνυμική με παραμέτρους $r \in \{1, 2, \ldots\}$ και $p = \frac{1}{2}$, και συνάρτηση πιθανότητας ατομικής ζημιάς τη Γεωμετρική με παράμετρο $p_1 \in (0,1)$ (δηλ. $S_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_1}$ με $P(N_1 = n_1) = \left(\begin{array}{c} r + n_1 - 1 \\ n_1 \end{array} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{r + n_1}, \; n_1 = 0, 1, 2, \ldots$ και $P(X_i = x) = p_1(1 - p_1)^x, \; x = 0, 1, \ldots, \; i = 1, 2, \ldots$).

   Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η S_2 είναι σύνθετη διωνυμική με παραμέτρους $r \in \{1, 2, \ldots\}$ και $p = \frac{1}{2}$ (όπως η S_1), και συνάρτηση πιθανότητας ατομικής ζημιάς τη Γεωμετρική με παράμετρο $p_2 \in (0,1)$ (δηλ. $S_2 = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N_2}$ με $P(N_2 = n_2) = \left(\begin{array}{c} r \\ n_2 \end{array} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r, \; n_2 = 0, 1, 2, \ldots$ και $P(Y_j = y) = p_2(1 - p_2)^y, \; y = 0, 1, \ldots, \; j = 1, 2, \ldots$).

   Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων p_1, p_2 τέτοιες, ώστε οι S_1, S_2 να έχουν την ίδια κατανομή, και, αν υπάρχουν, να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα p_1, p_2.

7. Ασκήσεις $2, 8, 10$ από το βιβλίο του Θ. Κάκουλλου, *Αναλογισμός, Τόμος Ι, Θεωρία Κινδύνου και Πιθανότητες*, Κεφάλαιο 3, σελ. 61-62

8. Ασκήσεις $22 - 25$ από βιβλίο Κ. Κουτσόπουλος, *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι: Θεωρία των Κινδύνων*, Κεφάλαιο 6, σελ. 101-102.

9. Να αποδείξετε τις παρακάτω κατανομές αθροισμάτων από δύο ανεξάρτητες τ.μ. με τη μέθοδο των συνελίξεων και με τη μέθοδο των ροπογεννητριών.

   (α) Το άθροισμα των διωνυμικών τ.μ. $b(n_1, p)$ και $b(n_2, p)$ είναι η διωνυμική τ.μ. $b(n_1 + n_2, p)$.

(β) Το άθροισμα των Poisson τ.μ. $Poisson(\lambda)$ και $Poisson(\mu)$ είναι μία Poisson τ.μ. με παράμετρο $\lambda + \mu$.

(γ) Το άθροισμα δύο Γάμμα τ.μ. $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ και $\Gamma(\alpha_2, \beta)$ είναι Γάμμα τ.μ. $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Επιμέλεια Ασκήσεων: Γιάννης Δημητρακόπουλος