# Πιθανότητες και Αναλογισμός - Ιανουάριος 2018

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:**
**ΑΜ :**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** 1. Διάρκεια εξέτασης : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.
2. Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
3. Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί.
4. Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας στα θέματα και σε κάθε πρόσθετη κόλλα που ζητάτε, πρόχειρη ή όχι. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται.
5. Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά **ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου**. Κινητό πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού.
**Καλή Επιτυχία.**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.** Ένας ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο $w$ και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 5 - e^{-\frac{w}{10}}$ επιθυμεί να ασφαλιστεί για ολική κάλυψη έναντι δύο ανεξάρτητων κινδύνων $X_1,\ X_2$ με πυκνότητες

$$f_{X_1}(x) = xe^{-x},\ x > 0 \text{ και } f_{X_2}(x) = e^{-x},\ x > 0,$$

αντίστοιχα. Για την ασφάλιση του σκέπτεται να ασφαλιστεί για τη συνολική ζημιά $X = X_1 + X_2$ σε μία εταιρεία.

**(α)** Προσδιορίστε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο που δέχεται να καταβάλλει για την ολική κάλυψη της συνολικής ζημιάς $X$.

**(β)** Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 3 - e^{-\frac{w_0}{20}}$, ποιό είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για ολική κάλυψη της συνολικής ζημιάς $X$; Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική;

**(γ)** Έστω ότι ο ασφαλιζόμενος αντιμετωπίζει **μόνο** τον δεύτερο κίνδυνο $X_2$ και διαθέτει ποσό $G = \frac{10}{9}\log\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ ως ασφάλιστρο. Αν μία εταιρεία του προτείνει τη μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς $I_d(X_2) = \max\{0, X_2 - d\},\ d \geq 0$ έναντι του δεύτερου κινδύνου, να βρείτε τη τιμή του αφαιρετέου ποσού $d$, ώστε η αναμενόμενη ωφέλεια του ασφαλιζόμενου να είναι ίση είτε με την προτεινόμενη μερική κάλυψη είτε χωρίς κάλυψη.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.**
Μία ασφαλιστική εταιρεία έχει στη κατοχή της ένα χαρτοφυλάκιο 200 ασφαλιστηρίων για την κάλυψη ατομικών κινδύνων που δίνονται από τις ανεξάρτητες και ομοιόμορφες τ.μ. $X_i \sim U(0,5),\ i = 1, 2, \ldots, 200$, με πυκνότητα $f_{X_i}(x) = \frac{1}{5},\ 0 < x < 5$.
Αν γνωρίζουμε ότι κάθε κίνδυνος έχει την ίδια πιθανότητα πραγματοποίησης $q = 0.05$, ανεξάρτητα από την πραγματοποίηση και το μέγεθος $X_i$ των υπόλοιπων κινδύνων, ενώ η εταιρεία εισπράτει για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο συνολικό ασφάλιστρο $G = (1+\theta)E[S],\ \theta > 0$ όπου $S$ η συνολική αποζημίωση, τότε
**(α)** να διατυπωθεί η συνολική αποζημίωση $S$ με χρήση κατάλληλου μοντέλου,
**(β)** να βρεθεί η μέση τιμή $E[S]$ και η αντίστοιχη διακύμανση $Var[S]$, και
**(γ)** να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\theta$, ώστε η πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία να είναι ίση με $0,01$.
**Σημείωση:**Δίνονται οι τιμές της συνάρτησης κατανομής της $\mathcal{N}(0,1)$, $\Phi(2.33) = 0.99,\ \Phi(1.96) = 0.975$ και $\Phi(1.64) = 0.95$.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.** Μία ασφαλιστική εταιρεία ασφαλίζει κτήρια έναντι πυρκαγιάς και το πλήθος ατυχημάτων για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο δίνεται από την τ.μ. $N$ που ακολουθεί κατανομή Poisson($\nu$). Επιπλέον, το ύψος της αποζημίωσης για κάθε ένα από αυτά στη περίπτωση πυρκαγιάς, δίνεται από την τ.μ. $X$ με πυκνότητα $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$, στοχαστικά ανεξάρτητη της τ.μ. $N$.
**(α)** Να διατυπωθεί η συνολική αποζημίωση $S$ με χρήση κατάλληλου μοντέλου και να βρεθεί η κατανομή της.

**(Συνέχεια Πίσω)**

**(β)** Να βρεθει η αναμενόμενη συνολική αποζημίωση $E[S]$ που θα καταβάλει η εταιρεία και η αντίστοιχη διακύμανση $Var[S]$.
**(γ)** Αν το μέσο πλήθος πυρκαγιών είναι ίσο με 300 στη μονάδα του χρόνου και η εταιρεία λαμβάνει συνολικό ασφάλιστρο 200 (όλα τα ποσά σε χιλ. ευρώ), να βρεθεί (προσεγγιστικά) η πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία από αυτή τη κάλυψη.
**Σημείωση:** Στο ερώτημα **(γ)** να αιτολογηθεί λεπτομερώς η ισχύς του θεωρήματος που θα χρησιμοποιήσετε για να υπολογίσετε τη συγκεκριμένη πιθανότητα.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.** Μία αντιπροσωπεία αυτοκινήτων έχει ένα πρόγραμμα χρηματοδότησης για την αγορά νέου αυτοκινήτου με αποπληρωμή της αξίας του αυτοκινήτου σε 60 ισόποσες ληξιπρόθεσμες μηνιαίες δόσεις με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 8%.
**(α)** Αν ένας πελάτης αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 20000 Ευρώ σύμφωνα με το παραπάνω πρόγραμμα χρηματοδότησης, τότε να βρεθεί η ονομαστική αξία της δόσης $R$.
**(β)** Αν ο ίδιος πελάτης πληρώσει κανονικά τις πρώτες 24 δόσεις, αλλά δε μπορέσει να καταβάλει τις δόσεις υπ' αριθμόν $25, \ldots, 36$, και μόνο για το διάστημα αυτό η Τράπεζα του επιβάλλει επιπρόσθετο μηνιαίο επιτόκιο 0.3%, τότε ποιό θα είναι το ποσό που θα οφείλει στη λήξη του $36^{ου}$ μήνα και ποια θα πρέπει να είναι η νέα μηνιαία δόση $R'$ που θα πρέπει να καταβάλει ώς τη λήξη του δανείου, ώστε να αποπληρώσει το αυτοκίνητο στη συμφωνημένη λήξη·
**(γ)** Αν μία άλλη τράπεζα έδινε ένα πρόγραμμα αποταμίευσης με τυχαία μηνιαία επιτόκια $I_1, I_2, \ldots, I_n$ και αντίστοιχες τυχαίες μηνιαίες εντάσεις ανατοκισμού για τους επόμενους $n$ μήνες που δίνονται απο τις ανεξάρτητες και ομοιόμορφες τ.μ. $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \sim U(0, \frac{1}{10})$, δηλ. η $\Delta_j = \log(1 + I_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ έχει πυκνότητα $g(\delta) = 10$, $0 < \delta < \frac{1}{10}$, τότε
**i** να βρείτε τη μέση τιμή της μέλλουσας αξίας μίας μονάδας μετά από $n$ μήνες και
**ii.** αν ο πελάτης επένδυε κάθε μήνα το ποσό των δόσεων του ερωτήματος **(α)** , ποιά είναι η μέση συσσωρευμένη (μελλοντική) αξία των 60 αυτών δόσεων·