Πιθανότητες και Αναλογισμός
Τυπολόγιο

1 Αθροίσματα

Για $x < 1$ ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Για $|x| < 1$ ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k = (1-x)^{-n},$$

Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}, \quad \sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1-x}.$$

2 Πιθανογεννήτριες (Μόνο για ακέραιες μη αρνητικές τ.μ.

Για μία μη αρνητική ακέραια τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας $P(X = x)$, $x \in \{0, 1, \ldots\}$, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ορίζεται ως

$$P_X(u) = E\left[u^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) u^n$$

για τα u που συγκλινει η δυναμοσειρά.

Ιδιότητες:

- Η πιθανογεννήτρια χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή, δηλ. $X =^d Y \Leftrightarrow P_X(u) = P_Y(u)$.
- $P(X = n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$.
- $E\left[X(X-1)\cdots(X-n+1)\right] = P_X^{(n)}(1)$.
- Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με πεπερασμένες πιθ/τριες $P_{X_i}(u), i = 1, \ldots, n$ σε μία περιοχή του u, τότε η πιθ/τρια της $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι η
$$P_{S_n}(u) = P_{X_1}(u) \cdots P_{X_n}(u)$$
- Αν X_i ακολουθία απο ακέραιες, μη αρνητικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη πιθ/τρια $P_X(t)$, σε μία περιοχή του t, και N μη αρνητική, ακέραια τ.μ. ανεξάρτητη των X_i με πιθανογεννήτρια $P_N(u)$ τότε η πιθ/τρια του τυχαίου αθροίσματος $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ είναι η
$$P_{S_N}(u) = P_N\left(P_X(u)\right)$$

3 Ροπογεννήτριες

Η ροπογεννήτρια μία τ.μ. X με σπ ή σππ $f_X(x)$ είναι η συνάρτηση

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & \text{αν } X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx, & \text{αν } X \text{ συνεχής} \end{cases}.$$

για τα t ώστε το άθροισμα (ολοκλήρωμα)$< \infty$.

Ιδιότητες:

- Η ροπογεννήτρια χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή, δηλ. $X =^d Y \Leftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$.
- $E[X^n] = M_X^{(n)}(0)$
- Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με πεπερασμένες ροπ/τριες $M_{X_i}(t), \imath = 1, \ldots, n$ σε μία περιοχή του t, τότε η ροπ/τρια της $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι η

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

- Αν X_i ακολουθία απο ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., με πεπερασμένη ροπ/τρια $M_X(t)$, σε μία περιοχή του t, και N μη αρνητική, ακέραια τ.μ. ανεξάρτητη των X_i, με πιθανογεννήτρια $P_N(u)$, τότε η ροπ/τρια του τυχαίου αθροίσματος $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ είναι η

$$M_{S_N}(t) = P_N\left(M_X(t)\right)$$

4 Δεσμευμένες Κατανομές και Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

Αν X, Y τ.μ. από κοινού σπ ή σππ $f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$, όπου $f_{X|Y}(x|y)$ η δεσμευμένη σπ ή σππ της τ.μ. X δεδομένου ότι $Y = y$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $E[X] = E[E[X|Y]] = E\left[m_{X|Y}(Y)\right],\ m_{X|Y}(Y) = E[X|Y = y]$.
2. $Var(X) = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$.
3. $E\left[e^{tX}\right] = E\left[E\left[e^{tX}|Y\right]\right]$.

5 Μίξη Κατανομών

Έστω τ.μ. $X = I \cdot X_1 + (1 - I) \cdot X_2$, με τ.μ. $I \sim b(p)$ (Bernoulli) ανεξάρτητη των τ.μ. X_1, X_2 και X_1 διακριτή με σκ. F_1, X_2 συνεχής με σκ. F_2, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x)$, όπου $F(x)$ η σκ. της τ.μ. X.
2. $E[g(X)] = pE[g(X_1] + (1 - p)E[g(X_2)]$.
3. $M_X(t) = pM_{X_1}(t) + (1 - p)M_{X_2}(t)$ για t ώστε να ορίζονται οι ροπογεννήτριες των X_1, X_2.

6 Θεωρία Κινδύνου: Αρχή Ωφελιμότητας

Ασφαλιζόμενος: Αρχικό Κεφάλαιο w, ω.σ. $u(w)$ και ασφάλιστρο G για ολική κάλυψη από κίνδυνο X τ.μ..

Ανίσωση Ασφαλιζόμενου: $u(w-G) \geq Eu(w-X)$

Μέγιστο Αποδεκτό Ασφάλιστρο, G_{max}: Αν u αύξουσα, τότε προκύπτει ως λύση της Εξίσωσης ασφαλιζόμενου

$$u(w-G) = Eu(w-X)$$

Ανίσωση Ασφαλιζόμενου για Μερική Κάλυψη $I(X) \leq X$:

$$Eu\left(w-G-(X-I(X))\right) \geq Eu(w-X)$$

Ασφαλιστής: Αρχικό Κεφάλαιο w_0, ω.σ. $u_I(w)$ και ασφάλιστρο H για ολική κάλυψη από κίνδυνο X τ.μ..

Ανίσωση Ασφαλιστή: $u_I(w_0) \leq Eu_I(w_0+H-X)$

Ελάχιστο Αποδεκτό Ασφάλιστρο, H_{min}: Αν u_I αύξουσα, τότε προκύπτει ως λύση της Εξίσωσης ασφαλιστη

$$u_I(w_0) = Eu_I(w_0+H-X)$$

Για εκθετικές ω.σ. $u_I(w) = u(w) = -e^{-\alpha w}, \alpha > 0 \Rightarrow G_{max} = H_{min} = \frac{1}{\alpha}\log(M_X(\alpha))$.

- u κινδυνοφοβική ω.σ. $\Leftrightarrow \exists G \geq \mu = E\left[X\right]$.
- Αν $G,\ H:\ \ G \geq H \geq \mu = E\left[X\right]$, τότε υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική με ασφάλιστρο $G \in [H_{min}, G_{max}]$.
- Στη περίπτωση της μερικής κάλυψης $I(X) \leq X$ όπου $G = E\left[I(X)\right] < \mu$ και ω.σ. u αύξουσα και κοίλη (κινδυνοφοβική), τότε η βέλτιστη μερική κάλυψη είναι η $I(X) = I_d(X) = \max\{0, X-d\}$ (ανακοπής ζημιάς) με $d : G = E\left[I_d(X)\right]$. (Θεώρημα Arrow).

7 Θεωρία Κινδύνου: Ατομικό Πρότυπο

Διατύπωση: Έστω χαρτοφυλάκιο n ανεξάρτητων κινδύνων με ύψη ατομικών ζημιών $X_i \sim F_i(x),\ i = 1, \ldots, n$ και πιθανότητα πραγματοποίησης q_i δηλ. η I_i =πραγματοποίηση του κινδύνου $i \sim b(q_i)$ (Bernoulli), τότε η συνολική αποζημιώση σύμφωνα με το ατομικό πρότυπο δίνεται από την τ.μ.

$$S = S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot X_i,$$

συμβ. $(q_i; \mu_i, \sigma_i^2)$, όπου $\mu_i = E\left[X_i\right]$ και $\sigma_i^2 = Var\left[X_i\right]$ για $i = 1, \ldots, n$.
Αποτελέσματα:

- $E\left[S\right] = \sum_{i=1}^{n} q_i\mu_i$.
- $Var\left[S\right] = \sum_{i=1}^{n} q_i\sigma_i^2 + q_i(1-q_i)\mu_i^2$.

- Περιθώριο Ασφαλείας: Για συνολικό ασφάλιστρο

  $$G = (1+\theta)E[S],\ \theta > 0,\ (\text{αρχή τροποποιημένης μαθηματικής ελπίδας})$$

  θέλουμε τη τιμή της παραμέτρου θ (περιθώριο ασφαλείας), ώστε

  $$P(S > G) = P(S > (1+\theta)E[S]) =: \alpha,\ \alpha \text{ μικρό},$$

  δηλ. το ποσοστό προσαύξησης θ σε σχέση με την αναμενόμενη συνολική αποζημίωση, ώστε η πιθανότητα το συνολικό ασφάλιστρο να μην επαρκεί για τη κάλυψη της συνολικής ζημιάς S να είναι κατάλληλα μικρή.

  Η παραπάνω τιμή προσδιορίζεται με χρήση Κ.Ο.Θ. όταν ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του, τότε

  $$Z = \frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \approx N(0,1)$$

  και

  $$P(S > (1+\theta)E[S]) = P\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} > \frac{(1+\theta)E[S] - E[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) =: \alpha \Rightarrow \theta = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{Var[S]}}{E[S]},$$

  με $z_\alpha :\ \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ και $\Phi(z)$ συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$.

8 Θεωρία Κινδύνου: Συλλογικό Πρότυπο

Διατύπωση: Συνολική αποζημίωση χαρτοφυλακίου στο διάστημα μίας περιόδου

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_N (\text{τυχαίο άθροισμα}),$$

όπου τ.μ. $N \in \{0,1,2,\ldots\}$ =πλήθος των κινδύνων (ατομικών ζημιών), στοχαστικώς ανεξάρτητη των ανεξάρτητων και ισόνομών τ.μ. X_i = μέγεθος της ατομικής ζημιάς $\sim F(x)$.

Αποτελέσματα: Έστω $\mu = E[X_i]$, $\sigma^2 = Var[X_i]$ και $P_X(u)$ $(M_X(t))$ η πιθανογεννήτρια (αντ. ροπογεννήτρια) των X_i $, i = 1,\ldots,n$ αν F διακριτή κατανομή (αντ. αν F συνεχής κατανομή).

- $E[S] = E[N]\mu$.
- $Var[S] = E[N]\sigma^2 + Var[N]\mu^2$.
- $P_S(u) = P_N(P_X(u))$, αν F διακριτή κατανομή, και,
  $M_S(t) = P_N(M_X(t))$, αν F συνεχής κατανομή, και $P_N(u)$ η πιθανογεννήτρια της ακέραιας, μη αρνητικής N.
- Ασυμπτωτική συμπεριφορά του S
  Έστω ακολουθία τ.μ. $N_\nu \in \{0,1,\ldots\}$. Αν η $\frac{N_\nu}{\nu} \to^P \theta$ (σύγκλιση κατά πιθανότητα) για $\nu \to \infty$ και $\theta > 0$ σταθερό τότε

  $$Z_\nu = \frac{S_{N_\nu} - E[N_\nu]}{\sqrt{Var[N_\nu]}} \to^d \mathcal{N}(0,1)$$

  Σημείωση: Αν X_ν ακολουθία τ.μ. με $\mu_\nu = E[X_\nu] \to \mu$ σταθερό και $\sigma_\nu^2 = Var[X_\nu] \to 0$ για $\nu \to \infty$ τότε η $X_\nu \to^P \mu$.

Βασικές Σύνθετες Κατανομές: Η κατανομή του τυχαίου αθροίσματος S καλείται σύνθετη κατανομή.

1. Σύνθετη Poisson: Η $S \sim \sigma.\text{Poisson}(\lambda, F)$ αν $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $X_i \sim F$.

   Ισχύουν τα εξής:

   α. $E[S] = \lambda\mu,\ Var[S] = \lambda(\sigma^2 + \mu^2)$.

   β. $P_S(u) = \exp(\lambda(P_X(u) - 1))$ ή $M_S(t) = \exp(\lambda(M_X(t) - 1))$.

   γ. Αν $S_{(1)}, S_{(2)}, \ldots, S_{(m)}$ ανεξάρτητες σ.Poisson με παράμετρο λ_k και κατανομή ατομικών ζημιών F_k για $k = 1, \ldots, m$, τότε η $S \sim \sigma.\text{Poisson}(\lambda,\ F)$ με $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ και $F(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{\lambda} F_k(x)$.

   δ. Η $S = x_1 \cdot N_1 + \ldots x_m \cdot N_m$ με x_k σταθερές και $N_k \sim\text{Poisson}(\lambda_k)$ τότε $S \sim \sigma.\text{Poisson}$ με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ και $F : P(X_i = x_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda},\ k = 1, 2 \ldots, m$.

   ε. Έστω $S \sim \sigma.\text{Poisson}$ με παράμετρο με $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ και $F : P((X_i = x_k) = \pi_k,\ k = 1, 2 \ldots, m$ τότε $S = x_1 \cdot N_1 + \ldots x_m \cdot N_m$ με x_k σταθερές και $N_k \sim\text{Poisson}(\lambda_k)$ ανεξάρτητες με $\lambda_k = \lambda\pi_k$.

2. Σύνθετη Γεωμετρική: Η $S \sim \sigma.\text{Geom}(p, F)$ αν $N \sim \text{Geom}(p)$ και $X_i \sim F$.

   Ισχύουν τα εξής:

   α. $E[S] = \frac{1-p}{p}\mu,\ Var[S] = \frac{1-p}{p}(\sigma^2 + \frac{\mu^2}{p})$.

   β. $P_S(u) = \frac{p}{1-P_X(u)(1-p)}$ ή $M_S(t) = \frac{p}{1-M_X(t)(1-p)}$.

3. Σύνθετη Αρνητική Διωνυμική: Η $S \sim \sigma.\text{NB}(r, p, F)$ αν $N \sim \text{NB}(r, p)$ και $X_i \sim F$.

   Ισχύουν τα εξής:

   α. $E[S] = r\frac{1-p}{p}\mu,\ Var[S] = r\frac{1-p}{p}(\sigma^2 + \frac{\mu^2}{p})$.

   β. $P_S(u) = \left(\frac{p}{1-P_X(u)(1-p)}\right)^r$ ή $M_S(t) = \left(\frac{p}{1-M_X(t)(1-p)}\right)^r$.

9 Θεωρία Κινδύνου: Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος - Θεωρία Χρεοκοπίας

Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος

Ορισμός

$$U(t) = u + ct - S(t),\ t \geq 0, u \geq 0,\ c > 0,$$

όπου $u = U(0)$ =αρχικό κεφάλαιο (απόθεμα), c =σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου και $\{S(t),\ t \geq 0\}$ η στοχαστική ανέλιξη των συσσωρευμένων αποζημιώσεων (απαιτήσεων), δηλ.

$$S(t) = S_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

όπου X_i ανεξ. και ισον. τ.μ. = ύψος ατομικών ζημιών $\sim F(x)$ με

$\mu_k = E[X^k],\ k = 1, 2, \ldots,\ \sigma^2 = Var(X)$ και $M_X(r) = E[e^{rX}]$ η ροπογεννήτρια των ατομικών ζημιών.

Βασικές Υποθέσεις:

1. $N(t)$ διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda > 0 \Rightarrow N(t) \sim$Poisson$(\lambda t) \Rightarrow S(t) \sim$ σύνθετη Poisson$(\lambda t, F(x))$
2. $c = (1+\theta)\lambda\mu_1 > \lambda\mu_1$, όπου $\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$ για δεδομένο c. Το θ καλείται περιθώριο ασφαλείας.

Βασικά Αποτελέσματα:

1. $U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t - S(t)$.
2. $E[U(t)] = u + \theta\lambda\mu_1 t$.
3. $Var[U(t)] = \lambda t(\mu_1^2 + \sigma^2) = \lambda t\mu_2$.
4. Ροπογεννήτρια της $U(t)$, η

$$\begin{aligned} M_{U(t)}(r) &= \exp\{(u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t)r\}M_{S(t)}(-r) \\ &= \exp\{(u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t)r + \lambda t(M_X(-r) - 1)\} \end{aligned}$$

Χρόνος Χρεοκοπίας και Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Ορισμός

$$T = min\{t > 0 : U(t) < 0\} = min\{t > 0 : S(t) > u + ct\}.$$

Αν $T < \infty$, τότε έχουμε χρεοκοπία, διαφορετικά, αν $T = \infty$ τότε $U(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$. Η συνάρτηση κατανομής της T ορίζεται συναρτήσει του αρχικού πλεονάσματος u, ως

$$\psi(t, u) = P(T < t|U(0) = u).$$

Πιθανότητα Χρεοκοπίας: Για $u \geq 0$ ορίζουμε τα παρακάτω,

$\psi(u) = P(T < \infty|U(0) = u)$ πιθανότητα χρεοκοπίας,

$\delta(u) = 1 - \psi(u) = P(T = \infty|U(0) = u)$ πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

Ασυμπτωτική Προσέγγιση: $\psi(u) \approx e^{-Ru}$, όπου R ο συντελεστής προσαρμογής.

Συντελεστής Προσαρμογής

Ορισμός

Ο συντελεστής προσαρμογής R για τη ΣΑΠ $U(t)$ που ορίσαμε παραπάνω ορίζεται ως η θετική λύση της εξίσωσης

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$$

Παρατηρήσεις:

1. Ο R ανεξάρτητος του λ.
2. Η εξίσωση έχει λύση τη τετριμμένη $r = 0$.
3. Για $\theta > 0$ υπάρχει θετική λύση. Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots$ θετικές λύσεις της εξίσωσης, τότε $R = min\rho_i$.

4. Για $\theta \to 0^+$, τότε ασυμπτωτικά η λύση της εξίσωσης είναι η $r = 0$ και $\psi(u) \to 1$.

5. Για $\theta \leq 0$, η $\psi(u) = 1$ (βέβαιη χρεοκοπία).

6. Προσεγγιστικός τύπος $R \approx \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}$ (από τους $n = 2$ πρώτους όρους του αναπτύγματος της ροπογεννήτριας $M_X(r)$ σε δυναμοσειρά).

7. Ερμηνεία και Σχετικές Ισοδυναμίες:
   Επειδή $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$, τότε η εξίσωση του συντ. προσαρμογής για $r = R$ γράφεται

   $$\lambda + cR = M_X(R).$$

   Αν S η συνολική αποζημίωση στο $(0, 1]$ (σε μοναδιαίο χρονικό διάστημα), τότε

   $$U = u + c - S \text{ με } S \sim \text{ σύνθετη Poisson } (\lambda)$$

   $$\text{και άρα } M_S(R) = exp\{\lambda(M_X(R) - 1)\}.$$

   Άρα, ο συντ. προσαρμογής R, είναι λύση και των

   $$e^{Rc} = Ee^{RS} \Leftrightarrow Ee^{-(c-S)R} = 1 \Leftrightarrow M_{c-S}(-R) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{R} ln\left(M_S(R)\right).$$

Βασικά Αποτελέσματα: Αποδεικνύεται ότι:

1. $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

2. $\psi(u) \leq e^{-Ru}, \ u \geq 0$ (εκθετικό φράγμα Lundberg).

3. $$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)} | T < \infty\right]}.$$

4. Αν $X_i \leq D$ (φραγμένες ατομικές αποζημιώσεις), τότε $\psi(u) \geq e^{-R(u+D)}, \ u \geq 0$

Η περίπτωση των εκθετικών ζημιών

Έστω X_i i.i.d.$\sim$ $Exp(\beta)$, τότε για τη ΣΑΠ $U(t)$ και τη πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ για δεδομένο $u \geq 0$ παίρνουμε:

1. $E[U(t)] = u + \frac{\theta\lambda t}{\beta}$.

2. $Var[U(t)] = \frac{2\lambda t}{\beta^2}$.

3. $M_{U(t)}(r) = \exp\{(u + \frac{(1+\theta)\lambda t}{\beta})r + \lambda t(\frac{\beta}{\beta+r} - 1)\}, \ r > -\beta$.

4. Εξίσωση Συντ. Προσαρμογής $1 + \frac{1+\theta}{\beta} r = \frac{\beta}{\beta - r}, \ r < \beta$.

5. $R = \beta\frac{\theta}{1+\theta}$.

6. Φράγμα Lundberg: Για $u \geq 0, \psi(u) \leq e^{-Ru} = exp\{-u\beta\frac{\theta}{1+\theta}\}$.

7. $\psi(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru} = \frac{1}{1+\theta} exp\{-u\beta\frac{\theta}{1+\theta}\}$.

Μέγεθος Χρεοκοπίας και Πτώση κάτω από το αρχικό απόθεμα

Ορισμοί

Ορίζουμε τις παρακάτω τ.μ.

$-U(T) \mid T < \infty =$ μέγεθος πτώσης πλεονάσματος $U(t)$ κάτω από 0 τη στιγμή T.

$T_0 = min\{t \geq 0 : U(t) < u\} = min\{t \geq 0 : ct - S(t) < 0\}$ η στιγμή της πτώσης πλεονάσματος κάτω από u για πρώτη φορά.

$L_1 = S(T_0) - cT_0 \mid T_0 < \infty$ μέγεθος πτώσης πλεονάσματος κάτω από u.

$L = \max\{t \geq 0 : S(t) - ct\} =$ μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Αποδεικνύεται ότι $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$, όπου L_i ανεξ. και ισόν. της L_1 και $N \sim Geom(\frac{\theta}{1+\theta})$.

Βασικά Αποτελέσματα: Αποδεικνύεται ότι:

1. Για $X_i \sim Exp(\beta)$, τότε $-U(T) \mid T < \infty \sim Exp(\beta)$.
2. Πυκνότητα της L_1 : $f_{L_1}(x) = \frac{1}{\mu_1}(1 - F_X(x))$ και ργ $M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r}\left(M_X(r) - 1\right)$.
3. Η L έχει μικτή κατανομή με

$$\begin{aligned} &\text{Για } x = 0, \quad f_L(0) = P(L = 0) = \tfrac{\theta}{1+\theta} = \delta(0), \\ &\text{για } x > 0, \qquad L \sim \text{ σύνθετη } Geom(\tfrac{\theta}{1+\theta}) \end{aligned}$$

4. Ρπογεννήτρια της L

$$\begin{aligned} M_L(r) &= \frac{\theta\mu_1 r}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{M_X(r) - 1}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}. \end{aligned}$$

5. $E[L] = M'_L(0) = \frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}$.
6. Σχέσεις με τις $\psi(u)$, $\delta(u)$:

$$\delta(u) = F_L(u) \Leftrightarrow \psi(u) = 1 - F_L(u) \Leftrightarrow f_L(u) = -\psi'(u) \Leftrightarrow E[L] = -\int_0^\infty u\psi'(u)du$$

Ειδικές Περιπτώσεις

A. **Διακριτή Διαδικασία Πλεονάσματος**

Ορισμός

$$U_n = u + G_1 + G_2 + \ldots + G_n, \; n = 1, 2, \ldots, \; u \geq 0,$$

όπου $u = U_0$ =αρχικό κεφάλαιο (απόθεμα) και $G_1, G_2, \ldots \in \mathbb{R} \sim G(x)$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $E[G] > 0$ και $G_i =$ το οικονομικό αποτέλεσμα της χρήσης i.

Βασικά Αποτελέσματα:

1. $E[U_n] = u + nE[G]$.
2. $Var[U_n] = nVar(G)$.

3. Ροπογεννήτρια της U_n, η $M_{U_n}(r) = e^{ur}\,(M_G(r))^n$
4. Προσδιορισμός Συντελεστή Προσαρμογής $\tilde{R}$
   Ο συντελεστής προσαρμογής $\tilde{R}$ στη ΣΑΠ διακριτού χρόνου είναι η θετική λύση της εξίσωσης $M_G(-r) = 1 \Leftrightarrow ln(M_G(-r) = 0)$.
5. Προσεγγιστικός τύπος $R \approx \frac{2\mu}{\sigma^2}$ με $\mu = E[G]$ και $\sigma^2 = Var(G)$ (από τους $n = 2$ πρώτους όρους του αναπτύγματος της ροπογεννήτριας $M_G(r)$ σε δυναμοσειρά).

Σημείωση: Η εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής προκύπτει από την εύρεση ενός $\tilde{R} > 0$ τέτοιου ώστε η $E[e^{-\tilde{R}U_n}] = M_{U_n}(-\tilde{R}) = e^{-\tilde{R}u}$ να είναι ίδια για κάθε n.

Εναλλακτικό μοντέλο:
Για σταθερό έσοδο c και $\{S_i:\ i = 1, 2, \ldots\}$ οι συνολικές αποζημιώσεις της $i-$χρήσης, τότε $G_i = c - S_i$ και η ΣΑΠ διακριτού χρόνου γράφεται

$$U_n = u + nc - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n),\ \text{με } S_i \text{ ανεξ. και ισόν. τ.μ.}$$

Βασικά Αποτελέσματα:

1. $E[U_n] = u + cn - nE[S]$.
2. $Var[U_n] = nVar(S)$.
3. Ροπογεννήτρια της U_n, η $M_{U_n}(r) = e^{(u+nc)r}\,(M_S(-r))^n$
4. Αν $S_i \sim$Poisson(λ_i), τότε $S_1 + \ldots + S_n \sim$ ς Poisson με $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. Σε αυτή τη περίπτωση, αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής προσαρμογής $\tilde{R}$ συμπίπτει με τον R του συνεχούς μοντέλου, δηλ. με τη θετική λύση της

   $$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = M_X(r),$$

   όπου X το ύψος ατομικής αποζημίωσης για τη σύνθετη Poisson $S_1 + \ldots + S_n$

Β. **Χρεοκοπία από μοναδικό γεγονός** Θεωρουμε τη ΣΑΠ συνεχούς χρόνου $U(t)$ για τη κάλυψη ενός μοναδικού ζημιογόνου γεγονότος με αποζημίωση $X \sim F(x)$.
Στη περίπτωση αυτή, η $S(t)$ δίνεται από την

$$S(t) = \begin{cases} 0, & t < T \\ X, & t \geq T \end{cases},$$

όπου T ο τυχαίος χρόνος χρεοκοπίας με σκ $\Phi(t)$ ή σππ $\phi(t)$, ανεξάρτητος της X.

Σε αυτή τη περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με

$$\psi(u) = P(U(T) < 0|T < \infty) = \int_0^\infty P(X > u + ct|T = t)\phi(t)dt = \int_0^\infty (1 - F(u + ct))\phi(t)dt$$

Γ. **Ατομικές Ζημιές από Μίξη Εκθετικών**
Έστω ότι οι ατομικές αποζημιώσεις προκύπτουν από τη μίξη δύο εκθετικών κατανομών, δηλ. οι i.i.d. τ.μ. $X_i = \begin{cases} Exp(\beta_1), & \text{με πιθ. } \alpha_1, \\ Exp(\beta_2), & \text{με πιθ. } \alpha_2, \end{cases}$ όπου $\beta_2 > \beta_1 > 0$ και $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Η σππ και η ργ της X δίνεται από

$$f(x) = \alpha_1\beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2\beta_2 e^{-\beta_2 x}$$
$$M_X(r) = \alpha_1\frac{\beta_1}{\beta_1 - r} + \alpha_2\frac{\beta_2}{\beta_2 - r},\ r < \beta_1$$

Σε αυτή τη περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει εκθετική μορφή με

$$\psi(u) = C_1 e^{-\rho_1 u} + C_2 e^{-\rho_2 u},$$

με ρ_1, rho_2 οι λύσεις της εξίσωσης του συντελεστή προσαρμογής, δηλ. της

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$$

και C_1, C_2 προσδιοριστέες σταθερές από το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\psi(0) = C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta}$$
$$\frac{C_1}{\rho_1} + \frac{C_2}{\rho_2} = \frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}$$

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την ιδιότητα $E[L] = -\int_0^\infty u\psi'(u)du$

10 Ανατοκισμός - Ράντες

Α. Σταθερού Επιτοκίου

Έστω κεφάλαιο P ανατοκίζεται για n περιόδους με σταθερό επιτόκιο περιόδου i
($i = \frac{r}{k}$ αν $r =$ σταθερό ετήσιο επιτόκιο και $k =$ πλήθος ανατοκιστικών περιόδων/έτος)
,

- Μέλλουσα Αξία μετά από n ανατοκιστικές περιόδους $F_n = P(1+i)^n = P(1+\frac{r}{k})^n$.
- Απλός Τόκος - Μέλλουσα Αξία μετά από n περιόδους χωρίς ανατοκισμό $\tilde{F} = P(1+ni)$.
- Χρόνος Διπλασιασμού $n = \frac{\log 2}{\log(1+i)}$.
- Μέλλουσα αξία μετά από χρόνο t με συνεχή ανατοκισμό $F_t = Pe^{rt}$.
- Πραγματικό ή Ισοδύναμο επιτόκιο περιόδου $r_\sigma = r + \frac{r^2}{2}$.

Μοντέλο Ανατοκισμού $K(t) =$ μέλλουσα συσσωρευμένη αξία κεφαλαίου $K(0)$ μετά από χρόνο t.

- Ένταση Ανατοκισμού τη στιγμή t: $\delta_t = \frac{K'(t)}{K(t)}$.
- Τόκος Περιόδου $(t, t+s]$: ${}_sI_t = K(t+s) - K(t)$.
- Πραγματικό ή Ισοδύναμο επιτόκιο περιόδου $[t, t+s]$: ${}_si_t = \frac{{}_sI_t}{sK(t)}$ (για $s = 1$: $i_t = \frac{K(t+1)-K(t)}{K(t)} \Leftrightarrow K(t+1) = (1+i_t)K(t)$

Για τον αναλογιστικό νόμο του ανατοκισμού, δηλ. $K(t) = e^{\delta t}$ έχουμε

- Ένταση Ανατοκισμού τη στιγμή t: $\delta_t = \delta$ σταθερό.
- Τόκος Περιόδου $(t, t+s]$: ${}_sI_t = e^{\delta t}(e^{\delta s} - 1)$.
- Πραγματικό ή Ισοδύναμο επιτόκιο περιόδου $[t, t+s]$: ${}_si_t = \frac{e^{\delta s}-1}{s}$
- Για μία περίοδο $s = 1$: $i_t = e^\delta - 1 = i \Leftrightarrow \delta = \log(1+i)$

Για τις ράντες: (ακολουθία ισόποσων καταβολών σε ίσα χρονικά διαστήματα) Έστω απόσβεση κεφαλαίου P με καταβολή δόσης R σε n τοκοφόρες περιόδους σταθερού επιτοκίου περιόδου i.
Προεξοφλητικός Παράγοντας: $\nu = \frac{1}{1+i}$
Προεξοφλητικό Επιτόκιο: $d = i\nu = \frac{i}{1+i}$.

- Παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας (οι καταβολές γίνονται στο τέλος κάθε περιόδου) με μοναδιαίες καταβολές $a_n = \frac{1-\nu^n}{i}$.
- Δόση ληξιπρόθεσμης ράντας $R = \frac{P}{a_n}$.
- Μέλλουσα Αξία ληξιπρόθεσμης ράντας μετά από n περιόδους με μοναδιαίες καταβολές $s_n = (1+i)^n a_n$.
- Παρούσα αξία προκαταβαλλόμενης ράντας (οι καταβολές γίνονται στην αρχή κάθε περιόδου) με μοναδιαίες καταβολές $a_{\ddot{n}} = \frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{1-\nu^n}{d}$.
- Δόση προκαταβαλλόμενης ράντας $R = \frac{P}{a_{\ddot{n}}}$.
- Μέλλουσα Αξία προκαταβαλλόμενης ράντας μετά από n περιόδους με μοναδιαίες καταβολές $s_{\ddot{n}} = (1+i)^n a_{\ddot{n}}$.
- Παρούσα αξία συνεχούς ράντας (οι καταβολές γίνονται συνεχώς μέσα στο διάστημα κάθε περιόδου) με μοναδιαίες καταβολές $\overline{a}_n = \frac{1-\nu^n}{\delta}$ με $\delta = \log(1+i)$.
- Μέλλουσα Αξία συνεχούς ράντας μετά από n περιόδους με μοναδιαίες καταβολές $\overline{s}_n = (1+i)^n \overline{a}_n = e^{\delta n}\overline{a}_n$.
- Αξία ληξιπρόθεσμης (ή προκαταβαλλόμενης ή συνεχούς) ράντας σε δεδομένη χρονική στιγμή $t = k$ περίοδος: Ισχύει $(1+i)^k a_n = s_k + a_{n-k} = \nu^{n-k} s_n$.

Β. Τυχαίου Επιτοκίου

Αν το επιτόκιο περιόδου I είναι τ.μ. τότε και τα παρακάτω είναι τ.μ.:

- $V = \frac{1}{1+I}$ (συντελεστής προεξόφλησης).
- $D = 1 - V$ (επιτόκιο προεξόφλησης).
- $D = \log(1+I)$ (ένταση ανατοκισμού).
- V^t (παρούσα αξία μίας χρηματικής μονάδας).
- $(1+I)^t$ (μελλοντική αξία μίας χρηματικής μονάδας).

Αν $M_\Delta(t)$ η ροπογεννήτρια της ανατοκιστικής έντασης τη στιγμή t, τότε για την αναμενόμενη παρούσα και μελλοντική αξία μίας χρημ. μονάδας αποδεικνύεται ότι:

- $E\left[V^t\right] = M_\Delta(-t)$.
- $E\left[(1+I)^t\right] = M_\Delta(t)$.

Η $M_\Delta(t)$ λέγεται και τοκογεννήτρια της αναμενόμενης μελλοντικής αξία μίας χρημ. μονάδας και ισχύει ότι:

$$M_\Delta(t) \cdot M_\Delta(-t) \geq 1.$$

Ράντες τυχαίου επιτόκιου

Μέση Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας A_n:

$$E\left[A_n\right] = \sum_{k=1}^{n} M_\Delta(-k).$$

Μέση Συσσωρευμένη Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας S_n:

$$E\left[S_n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} M_\Delta(k).$$

Μέση Παρούσα Αξία Προκαταβαλλόμενης Ράντας $A_{\ddot{n}}$:

$$E\left[A_{\ddot{n}}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} M_\Delta(-k).$$

Μέση Συσσωρευμένη Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας $S_{\ddot{n}}$:

$$E\left[S_{\ddot{n}}\right] = \sum_{k=1}^{n} M_\Delta(k).$$

Μέση Παρούσα Αξία Συνεχούς Ράντας $\bar{A}_n$:

$$E\left[\bar{A}_n\right] = \int_0^n M_\Delta(-t)dt.$$

Μέση Συσσωρευμένη Αξία Συνεχούς Ράντας $\bar{S}_n$:

$$E\left[\bar{S}_n\right] = \int_0^n M_\Delta(t)dt.$$

Μέση Ένταση:

$$\bar{\delta}_t^\alpha : \exp(-t\bar{\delta}_t) = E\left[V^t\right] = M_\Delta(-t) \Rightarrow \bar{\delta}_t^\alpha = -\frac{1}{t}\log M_\Delta(-t).$$

$$\bar{\delta}_t^s : \exp(t\bar{\delta}_t) = E\left[(1+I)^t\right] M_\Delta(t) \Rightarrow \bar{\delta}_t^s = \frac{1}{t}\log M_\Delta(t).$$

11 Κατανομή Επιβίωσης

Έστω τ.μ. $X \geq 0$ ηλικία ατόμου με συν.κ. $F(x)$. Η συνάρτηση

$$s(x) = P\left(X > x\right) = 1 - F(x) \text{ (το άτομο να επιβιώσει πάνω από } x \text{ έτη)}$$

καλείται συνάρτηση επιβίωσης και μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω:

- (x) = ηλικία ατόμου.
- $T_x \equiv T(x) = \{X - x | X > x\}$ = υπόλοιπη ή μελλοντική ζωή ατόμου ηλικίας (x).
- ${}_tq_x = P\left(T_x \leq t\right) = P\left(X - x \leq t | X > x\right) = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}$ (πιθανότητα άτομο ηλικίας (x) να πεθάνει το πολύ σε t έτη), $q_x = \frac{s(x)-s(x+1)}{s(x)}$, ${}_xq_0 = F(x)$.

- ${}_tp_x = P\left(T_x > t\right) P\left(X - x > t | X > x\right) = 1 -_t q_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$ (πιθανότητα άτομο ηλικίας (x) να επιβιώσει πάνω από t έτη), $p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)},\ {}_xp_0 = s(x)$.
- ${}_{t|k}q_x = P\left(t < T_x \leq t + k\right) =_t p_x \cdot_k q_{x+t}$ (πιθανότητα άτομο ηλικίας (x) να επιβιώσει για t έτη και να πεθάνει στα επόμενα k).
- $\mu_x = \mu(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} =$ ένταση θνησιμότητας ατόμου ηλικίας (x) και χαρακτηρίζει τη κατανομή του χρόνου ζωής X.
- ${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(u)du\right)$ και ${}_tq_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(u)du\right)$

Κατανομή και Ροπές του υπολοίπου ζωής: Έστω $G(t)$ και $g(t)$ η συν.κ. και η πυκνότητα του υπολοίπου ζωής T_x, τότε

$$G(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)},\ g(t) = \mu_{x+t} \cdot_t p_x$$

και

$$E\left[T_x\right] = \int_0^{\infty} {}_up_x du,\ E\left[T_x^2\right] = 2\int_0^{\infty} u \cdot_u p_x du.$$