Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές
Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

2 Μαΐου 2010

Άσκηση 1: Δυο τίμια ζάρια ρίπτονται. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y, όταν

1. X είναι η μεγαλύτερη από τις ρίψεις και Y το άθροισμα των ρίψεων,
2. X είναι η ρίψη του πρώτη ζαριού και Y η μεγαλύτερη από τις ρίψεις,
3. X είναι η μικρότερη και Y η μεγαλύτερη από τις ρίψεις.

Άσκηση 2: Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y} & \text{αν } y > 0 \text{ και } -y < x < y \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Βρείτε τη σταθερά c.
2. Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y αντίστοιχα.
3. Υπολογίστε την $E[X]$.
4. Βρείτε τις δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ και $f_{Y|X}(y|x)$.

Άσκηση 3: Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) & \text{αν } 0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Επιβεβαιώστε ότι η $f(x, y)$ είναι πράγματι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
2. Υπολογίστε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ της X.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > Y)$.
4. Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y > \frac{1}{2}|X < \frac{1}{2})$.
5. Υπολογίστε την $E[X]$.
6. Υπολογίστε την $E[Y]$.
7. Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$.

Άσκηση 4: Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < Y)$.
2. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < a)$.

Άσκηση 5: Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{αν } 0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
2. Υπολογίστε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ της X.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y < 1)$.
4. Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$.

Άσκηση 6: Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & \text{αν } 0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
2. Υπολογίστε την $E[X]$.
3. Υπολογίστε την $E[Y]$.
4. Υπολογίστε την $Var[X]$.
5. Υπολογίστε την $Var[Y]$.

Άσκηση 7: Δυο τίμια ζάρια ρίπτονται. Έστω X και Y, αντίστοιχα, η μεγαλύτερη και η μικρότερη από τις ζαριές. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$, για $x = 1, 2, \ldots, 6$. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 8: Η (X, Y) είναι συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{αν } x > 0 \text{ και } y > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

1. Βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X, δοθέντος ότι $Y = y$, καθώς και τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y, δοθέντος ότι $X = x$.
2. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Z = XY$.

Άσκηση 9: Έστω X και Y ανεξάρτητες γεωμετρικές τυχαίες μεταβλητές με την ίδια παράμετρο p, δηλαδή $P(X=i) = P(Y=i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$.

1. Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $X + Y = n$, δηλαδή τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(X = i|X + Y = n)$.
2. Τί είδους κατανομή ακολουθεί η X δεδομένου ότι $X+Y = n$; Εξηγήστε το αποτέλεσμα διαισθητικά.

Άσκηση 10: Έστω X και Y ανεξάρτητες διωνυμικές τυχαίες μεταβλητές με τις ίδιες παραμέτρους n και p, δηλαδή $P(X=i) = P(Y=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

1. Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $X + Y = m$, δηλαδή τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(X = i|X + Y = m)$.
2. Τί είδους κατανομή ακολουθεί η X δεδομένου ότι $X+Y = m$; Εξηγήστε το αποτέλεσμα διαισθητικά.