Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία
Περίληψη

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

27 Φεβρουαρίου 2010

Έστω δυο ενδεχόμενα E και F ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο S. Αν $P(F) > 0$, δηλαδή το F έχει μη-μηδενική πιθανότητα να πραγματοποιηθεί, τότε ορίζεται **η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου E δοθέντος του F** ως:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(E|F)$ πρέπει να ερμηνεύεται διαισθητικά ως η πιθανότητα να (έχει) πραγματοποιηθεί το E, δεδομένης της πληροφορίας ότι το F έχει πραγματοποιηθεί. Τα τρία βασικά αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς με δεσμευμένες πιθανότητες είναι το πολλαπλασιαστικό θεώρημα, το θεώρημα ολικής πιθανότητας και το θεώρημα Bayes.

Το **πολλαπλασιαστικό θεώρημα** λέει ότι οποτεδήποτε έχουμε μια πεπερασμένη οικογένεια ενδεχομένων $E_1, E_2, E_3 \ldots, E_n$ τότε η πιθανότητα της τομής τους μπορεί να υπολογιστεί απο τον τύπο

$$P(E_1E_2E_3\cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\cdots P(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1}).$$

Το **θεώρημα ολικής πιθανότητας** λέει ότι άν έχουμε μια διαμέριση $F_1, F_2, F_3, \ldots$ του δειγματικού χώρου S (δηλαδή $\cup_{i=1}^{\infty} F_i = S$ και τα ενδεχόμενα F_i είναι ανά δύο ασυμβίβαστα) τότε ο υπολογισμός της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου E μπορεί να γίνει μέσω του τύπου

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E|F_i).$$

Λέμε τότε ότι υπολογίζουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου E "δεσμεύοντας" στα F_i. Στην απλούστερη μορφή του, το θεώρημα ολικής πιθανότητας λέει ότι δοθέντων δυο ενδεχομένων E και F, η πιθανότητα πραγματοποίησης του E μπορεί να βρεθεί δεσμεύοντας στο αν το F πραγματοποιήθηκε ή όχι. Έχουμε τότε τον τύπο

$$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c).$$

Το **θεώρημα του Bayes** λέει ότι αν δίνεται ένα ενδεχόμενο E και μια διαμέριση $F_1, F_2, F_3, \ldots$ του δειγματικού χώρου S, τότε ο υπολογισμός των δεσμευμένων πιθανοτήτων $P(F_j|E)$, $j = 1, 2, \ldots$ μπορεί να γίνει μέσω του τύπου

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j)P(E|F_j)}{P(E)} = \frac{P(F_j)P(E|F_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E|F_i)}.$$

Η αξία του θεωρήματος Bayes βρίσκεται στο ότι επιτρέπει υπολογισμούς πιθανοτήτων για πειράματα τύχης που διεξάγονται σε στάδια. Επομένως μπορεί να μας ενδιαφέρει η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου F_i που αναφέρεται στο πρώτο στάδιο ενός πειράματος, δεδομένου ότι ξέρουμε τι έγινε σε κάποιο επόμενο στάδιο ή στο τέλος, πράγμα που αντιστοιχεί στην πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου E.

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτόμαστε το θεώρημα Bayes είναι ο εξής: Θεωρούμε ότι τα ενδεχόμενα F_i αντιστοιχούν σε αμοιβαία αποκλειόμενες υποθέσεις ως προς το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης. Το πείραμα πραγματοποιείται και μας δίνεται η πληροφορία ότι κάποιο ενδεχόμενο E πραγματοποιήθηκε. Αυτή η επιπλέον πληροφορία μπορεί να μην μας προκαθορίζει ακριβώς ποιά υπόθεση ισχύει (δηλαδή ποιο F_i έχει πραγματοποιηθεί), αλλά μεταβάλει τις αρχικές πιθανότητες των υποθέσεων σχετικά με την έκβαση του πειράματος. Το θεώρημα Bayes δείχνει πως υπολογίζονται οι "εκ των υστέρων πιθανότητες" $P(F_j|E)$ των υποθέσεων F_j δεδομένης της πληροφορίας ότι το E πραγματοποιήθηκε συναρτήσει των "αρχικών" ή "εκ των προτέρων πιθανοτήτων" $P(F_j)$ και των πιθανοτήτων $P(E|F_j)$.

Ο **λόγος πιθανοφανειών (the odds)** ενός ενδεχομένου H ορίζεται ως ο λόγος $\frac{P(H)}{P(H^c)}$. Ο λόγος αυτός εκφράζει πόσο πιθανότερο είναι να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο από το να πραγματοποιηθεί το συμπληρωματικό του. Η έννοια αυτή χρησιμοποιείται συχνά στη γλώσσα των στοιχημάτων όπου λέμε ότι στοιχηματίζω 1 προς τόσο ότι θα συμβεί το τάδε. Ουσιαστικά στη γλώσσα των στοιχημάτων μιλάμε με λόγους πιθανοφανειών, εκτιμώντας πόσο πιθανότερο είναι ένα ενδεχόμενο από το συμπληρωματικό του. Ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{P(H)}{P(H^c)}\frac{P(E|H)}{P(E|H^c)},$$

που δείχνει πως "ενημερώνεται" ο λόγος πιθανοφανειών ενός ενδεχομένου H όταν προκύψουν νέα στοιχεία, δηλαδή δοθεί η πληροφορία ότι έχει πραγματοποιηθεί κάποιο ενδεχόμενο E.

Δυο ενδεχόμενα E και F λέγονται **ανεξάρτητα** αν

$$P(EF) = P(E)P(F).$$

Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με καθεμιά από τις συνθήκες $P(E|F) = P(E)$ και $P(F|E) = P(F)$. Επομένως η διαισθητική ερμηνεία της ανεξαρτησίας δυο ενδεχομένων E και F είναι ότι η γνώση της πραγματοποίησης του ενός από αυτά δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου. Γενικότερα, n ενδεχόμενα $E_1, E_2, \ldots, E_n$ λέγονται ανεξάρτητα αν για οποιαδήποτε επιλογή δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ είναι

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_r}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\cdots P(E_{i_r}).$$

Προσοχή! Αν τα μέλη μιας οικογένειας ενδεχομένων $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι ανά δύο ανεξάρτητα, δεν έπεται ότι τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι ανεξάρτητα. Πρέπει να ελεγχθεί ότι για οποιαδήποτε επιλογή από αυτά η πιθανότητα της τομής τους ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους.

Δοθέντος ενός ενδεχομένου F η δεσμευμένη πιθανότητα $P(\cdot|F)$ έχει τις τρεις ιδιότητες που υποθέσαμε ως αξιώματα για την αρχική πιθανότητα P:

1. $0 \le P(E|F) \le 1$, για κάθε ενδεχόμενο E
2. $P(S|F) = 1$
3. Για κάθε ακολουθία ανά δύο ασυμβίβαστων ενδεχομένων $E_1, E_2, \ldots$ (δηλαδή $E_i \cap E_j = \emptyset$ για $i \neq j$)

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i|F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i|F)$$

Επομένως, όλα τα υπολογιστικά αποτελέσματα που ισχύουν για την αρχική πιθανότητα P ισχύουν και για οποιαδήποτε δεσμευμένη πιθανότητα $P(\cdot|F)$, με δέσμευση σε κάποιο ενδεχόμενο F.