2ο Μάθημα Πιθανοτήτων 19/2/2010

① Αξιωματική θεμελίωση Πιθανοτήτων

Πείραμα τύχης $(S, \mathcal{A}, P)$

S → σύνολο δυνατών αποτελ.

$\mathcal{A}$ → σύνολο ενδεχομ. $|A|$

P → συν/ση πιθαν.

1) $0 \leq P(E) \leq 1$, $E \in \mathcal{A}$

2) $P(S) = 1$

3) $A_1, A_2, \dots$ με $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

② Βασικοί Υπολογισμοί

1) $P(\emptyset)=0$

2) $P(E^c)=1-P(E)$

3) $P(E\cup F) = P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) - \dots +$

$$+ (-1)^{n+1} P(E_1E_2\dots E_n)$$

5) $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$ (η συνάρτηση πιθανότητας είναι μονότονη)

6) $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

7) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων $\Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$ (σα να παίρναμε την πιθ. του μεγαλ. ενδεχ.)

$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία ενδεχομένων $\Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$ (-"- -"- -"- του μικρ. -"-)

③ Κλασική Πιθανότητα

S πεπερασμένος δ.χ.
$= \{1, 2, \dots, N\}$

$$P(\{i\}) = \frac{1}{n}$$

Γενικά: $P(A) = \frac{|A|}{|S|} =$, όπου $|A|$ το πλήθος στοιχείων του A.

$$= \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

④ Παραδείγματα

3 παίκτες που ρίχνουν από ένα ζάρι: A, B, Γ

P(η ρίψη του Γ να ισούται με το άθροισμα ρίψεων των A,B) = ;

Δειγμ. Χώρος: $\{(\underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\alpha}, \underset{\substack{\uparrow\\ B}}{\beta}, \underset{\substack{\uparrow\\ \Gamma}}{\gamma}) : \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}\}$

Έχω: $|S| = 6^3 = 216$.

Το ενδεχόμενο είναι: $E = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in S : \gamma = \alpha+\beta\}$ και $|E| = 15$

αφού $E = \{(1,1,2), (1,2,3), (2,1,3), (1,3,4), (3,1,4), (2,2,4), (1,4,5), (2,3,5), (3,2,5), (4,1,5), (1,5,6), (2,4,6), (3,3,6), (4,2,6), (5,1,6)\}$.

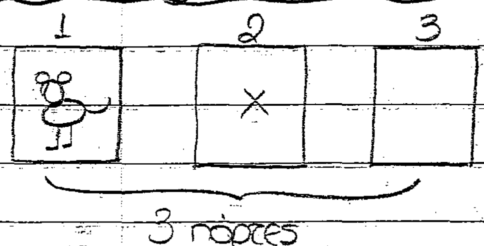
Άρα: $P(E) = \frac{15}{216}$.

Γενίκευση με N-εδρο ζάρι: $|S| = N^3$.

$|E| = 1+2+3+\dots+N-1 = \frac{(N-1)N}{2}$

Άρα: $P(E) = \frac{\frac{N(N-1)}{2}}{N^3} = \frac{N-1}{2N}$

(5) Παράδειγμα 2: The Monty Hall dilemma



1 μεγάλο δώρο

2 αποτυχίες.

Πείραμα Τύχης:

1) Επιλογή πόρτας που θα κρυφτεί το δώρο
2) —||— —||— από τον παίκτη
3) Αποκάλυψη πόρτας με αποτυχία.

1)	2)	3)		Πιθανότητα
1/3: 1	1/3: 1	1/2: 2	(1,1,2) ○	1/18
		1/2: 3	(1,1,3) ○	1/18
	1/3: 2	1: 3	(1,2,3) ✓	1/9
	1/3: 3	1: 2	(1,3,2) ✓	1/9
1/3: 2	1/3: 1	1: 3	(2,1,3) ✓	1/9
	1/3: 2	1/2: 1	(2,2,1) ○	1/18
		1/2: 3	(2,2,3) ○	1/18
	1/3: 3	1: 1	(2,3,1) ✓	1/9
1/3: 3	1/3: 1	1: 2	(3,1,2) ✓	1/9
	1/3: 2	1: 1	(3,2,1) ✓	1/9
	1/3: 3	1/2: 1	(3,3,1) ○	1/18
		1/2: 2	(3,3,2) ○	1/18

○ μένω σταθερός

✓ αλλάζω την αρχική μου επιλογή

Πιθανότητα δειγμ. σημείων

P(κερδίζω αν μένω σταθ. στην αρχική επιλογή) $= \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$

P(κερδίζω αν αλλάζω επιλογή) $= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

6) Αποδείξεις Βασικών Υπολογισμών

1) $P(\emptyset) = 0$

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ ακολουθία ενδεχομένων

$A_1 = S$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = \emptyset$

Αξίωμα 3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow \overset{\text{Αξίωμα 2}}{P(S)} = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) \overset{\text{Αξίωμα 1}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2) $P(E^c) = 1 - P(E)$

$A_1 = E$, $A_2 = E^c$, $A_3 = \emptyset$, $A_4 = \emptyset$, $\ldots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P(S) = P(E) + P(E^c) + \sum_{i=3}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$