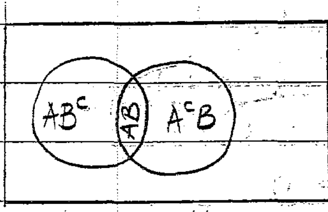
3ο Μάθημα Πιθανοτήτων — 22/2/2010

① Αποδείξεις Βασικών Υπολογισμών

3) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



$A\cup B = AB^c \cup AB \cup A^cB$

ασυμβίβαστα

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(AB^c)+P(AB)+P(A^cB)$

$= P(AB^c)+P(AB)+P(A^cB)+P(AB)-P(AB)$

$= P(A)+P(B)-P(AB)$

4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) - \sum_{i=j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) - \dots +$

$+ (-1)^{n+1} P(E_1E_2\dots E_n)$

Επαγωγή χρησιμοποιώντας το 3).

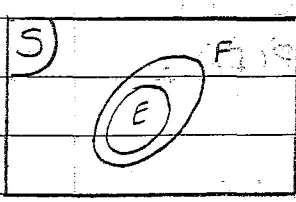
Για $n=3$.

$P(E_1\cup E_2\cup E_3) = P(E_1\cup E_2)+P(E_3)-P((E_1\cup E_2)\cap E_3) =$

$= P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2)+P(E_3)-P(E_1E_3)-$

$-P(E_3E_2)+P(E_1E_2E_3)$

5) $E\subseteq F \Rightarrow P(E)\leq P(F)$

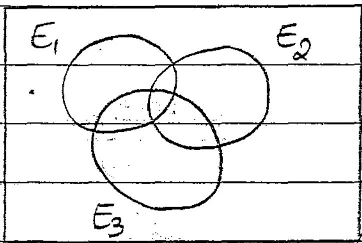


$F = E\cup FE^c$ $P(FE^c)>0$

$\Rightarrow P(F) = P(E)+P(FE^c) \Rightarrow P(F)\geq P(E)$

6) $E_1, E_2, \dots$ ακολουθία ενδεχομένων

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$



$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup (E_2 E_1^c) \cup (E_3 E_1^c E_2^c) \cup \dots$$

***

$F_1 = E_1$

$F_i = E_i E_1^c E_2^c \dots E_{i-1}^c \qquad i \ge 2.$

Τα F_i είναι ασυμβίβαστα και $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i .$

Τώρα: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \xrightarrow{F_i \text{ ασυμβίβαστα}} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(\underbrace{E_i E_1^c E_2^c \dots E_{i-1}^c}_{\subseteq E_i}) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

7) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων

$\Downarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Χρησιμοποιώ τα ίδια F_i με την απόδειξη 6)

Όμως $F_1 = E_1 \quad F_i = E_i E_{i-1}^c \ , i \ge 2.$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \xlongequal{F_i \text{ ασυμβ.}} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}_{E_n}\Big).$$

Ομοίως αποδεικνύεται $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$, όπου
$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ φθίνουσα
ακολουθία ενδεχομένων.

<u>Ισχύει</u>: $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots \Rightarrow E_1^c \subseteq E_2^c \subseteq E_3^c \subseteq \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c) \Rightarrow P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - P(E_n)\right) \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

② Παράδειγμα 1

Πείραμα τύχης: Ρίψη 2 ζαριών.

Δειγματικός χώρος $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6)$
$(2,1), (2,2), (2,3), \dots, (2,6)$
$\dots$
$(6,1), (6,2), (6,3), \dots, (6,6)\}$

$\downarrow$

$|S| = 36$

$P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36} \leftarrow$ ισοπίθανα $\qquad P(A) = \frac{|A|}{|S|}$

A: το άθροισμα των ενδείξεων είναι "7"
$= \{(1,6), (6,1), (3,4), (4,3), (5,2), (2,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B: η μεγαλύτερη ένδειξη είναι 4
$= \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,1), (4,2), (4,3)\} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{36}$

Γ: το 1ο ζάρι έφερε άρτια ζαριά
$= \{(2,1), \dots, (2,6), (4,1), \dots, (4,6), (6,1), \dots, (6,6)\} \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{18}{36} = \frac{1}{18}$

Δ: η πρώτη ζαριά είναι μικρότερη της δεύτερης
$= \{(1,2), \dots, (1,6), (2,3), \dots, (2,6), (3,4) \dots (3,6),$
$(4,5), \dots (4,6), (5,6)\} \Rightarrow P(\Delta) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36}$

Ε: Διπλή ζαριά
$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \Rightarrow P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Z : Εξάρες = {(6,6)}

$$P(Z) = \frac{1}{36}$$

H : Ασόδιο = {(1,2), (2,1)}

$$P(H) = \frac{2}{36}$$

③ Παράδειγμα 2 (Chuck-a-Luck)

Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε έναν αριθμό μεταξύ του 1 και του 6.
Ρίχνονται 3 ζαριές.
Χάνει αν κανένα ζάρι δεν φέρει τον αριθμό που στοιχημάτισε.
P(κερδίζει ο παίκτης) = ;
Πείραμα τύχης: Ρίψη 3 ζαριών.
Δειγματικός χώρος: $\{(1,1,1), \ldots, (6,6,6)\} \Rightarrow |S| = 6^3 = 216$
Έστω ότι στοιχημάτισε στο "i".

{Κερδίζει ο παίκτης} = {έρχεται (k, l, m) που περιέχει το i} =
= {το πρώτο ζάρι φέρνει i} (= A)
∪ {το δεύτερο ζάρι φέρνει i} (= B)
∪ {το τρίτο ζάρι φέρνει i} (= Γ.)

P(κερδίζει ο παίκτης) $= P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(B\Gamma) - P(A\Gamma) + P(AB\Gamma) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{1}{2} - \frac{17}{216} \simeq 40\%$

④ Άσκηση

Μια οικογένεια έχει 4 παιδιά. Τι είναι πιθανότερο σχετικά με το φύλο των παιδιών; 3-1 ή 2-2;