5ο Μάθημα Πιθανοτήτων 1/3/2010

Στοιχεία Συνδυαστικής για Πιθανότητες

① Πολλαπλασιαστική Αρχή

Πείραμα Τύχης r σταδίων

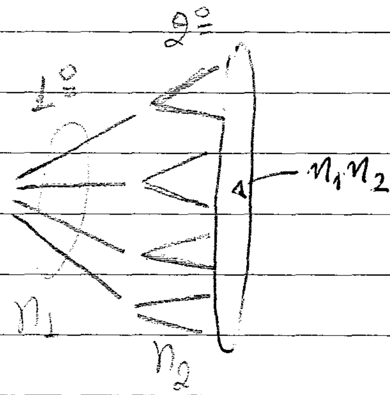
1ο Στάδιο $\rightarrow n_1$ επιλογές

2ο —ΙΙ— $\rightarrow n_2$ επιλογές

⋮

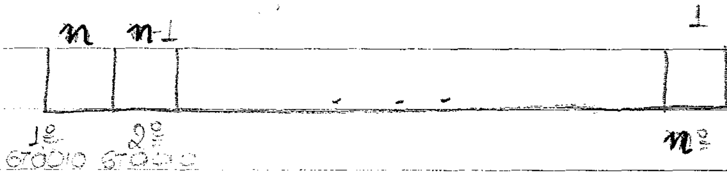
rο —ΙΙ— $\rightarrow n_r$ επιλογές

Τότε το πείραμα τύχης έχει συνολικά $n_1 n_2 \ldots n_r$ αποτελέσματα



② Μετάθεση

Μετάθεση των $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ - είναι κάθε τοποθέτηση των $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ σε σειρά



Μεταθέσεων n στοιχείων $= n!$

③ Διάταξη

Διάταξη $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ n ανά k λέγεται κάθε διατεταγμένη k-άδα στοιχείων του.

απλή (χωρίς επανάληψη)   επαναληπτική

\# διατάξεων n ανά k $= n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

\# επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n^k$

④ Συνδυασμός

Συνδυασμός του $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ n ανά k είναι κάθε μη διατεταγμένη επιλογή k στοιχείων του.

απλός   με επανάληψη

\# απλών συνδυασμών n ανά k = ;

$$\#\text{ συνδυασμών n ανά k} \times k! = \#\text{ Διατάξεων n ανά k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

$\Rightarrow$ \# συνδυασμών n ανά k χωρίς επανάληψη $= \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$

Το επιχείρημα "χαλάει" για τους επαναληπτικούς συνδυασμούς

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ $\quad (n=3,\ k=2)$

$\{\omega_1, \omega_2\} \to (\omega_1, \omega_2),\ (\omega_2, \omega_1)$

$\{\omega_1, \omega_3\} \to (\omega_1, \omega_3),\ (\omega_3, \omega_1)$

$\{\omega_1, \omega_1\} \to (\omega_1, \omega_1)$

Αποδεικνύεται ότι:

$\#$ επαναληπτικών συνδυασμών n ανά $k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι επαναληπτικοί συνδυασμοί γενικά δεν εμφανίζονται σε προβλήματα πιθανοτήτων.

5) (Αντι)Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: ρίψη 2 όμοιων ζαριών

"Φυσικός" δειγματικός χώρος (τι βλέπω) = όλοι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί 6 ανά 2 του $\{1, 2, \ldots, 6\}$

"Σωστός" δειγματικός χώρος (όλα τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα) = όλες οι διατάξεις με επανάληψη 6 ανά 2

6) Λόττο

Πείραμα τύχης: κάλπη με 49 νούμερα $\{1, 2, \ldots, 49\}$

Επιλέγονται 6 νούμερα (χωρίς επανάθεση)

Κερδίζω "6-άρι" αν βρω και τα 6

Κερδίζω "5-άρι" αν βρω τα 5 απ' τα 6.

κτλ

"Δυνατός" δειγματικός χώρος (που κάνει όλα τα αποτελέσματα ισοπίθανα) είναι το σύνολο των διατ. 49 ανά 6 των $\{1, 2, \ldots, 49\}$.

$P(\text{εξάρι}) = \dfrac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}$ **Δυνατές** = διατάξεις 49 ανά 6 $= \dfrac{49!}{(49-6)!}$

Ευνοϊκές = Μεταθ. των αριθμών του δελτίου μου $= 6!$

Άρα: $P(\text{εξάρι}) = \dfrac{6!}{\frac{49!}{(49-6)!}} = \dfrac{1}{\frac{49!}{6!(49-6)!}} = \dfrac{1}{\binom{49}{6}}$

Ο "φυσικός" δειγματικός χώρος που έχει ως αποτελέσματα συνδυασμούς με 6 στοιχεία είναι επίσης "δυνατός" (όλα ισοπίθανα)

$P(\text{πεντάρι}) = \dfrac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}$

Δειγματικός χώρος διατάξεων $\Rightarrow P(\text{πεντάρι}) = \dfrac{?}{\frac{49}{(49-6)!}}$

Έχουμε: Διάταξη με 5 αριθμούς από τους 6 σημειωμένους του δελτίου μου και 1 αριθμός εκτός δελτίου

1ο στάδιο: Επιλογή 1 αριθμού εκτός δελτίου $\Rightarrow$ 43 επιλογές

2ο στάδιο: Επιλογή 5 αριθμών από τους αριθμούς του δελτίου μου $\Rightarrow \binom{6}{5} = 6$ επιλογές

3ο στάδιο: Βάζω τους αριθμούς σε σειρά $\Rightarrow 6!$ επιλογές

Επομένως: $P(\text{πεντάρι}) = \dfrac{43 \cdot 6 \cdot 6!}{\frac{49!}{(49-6)!}} = \dfrac{\binom{43}{1}\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}}$

7) Λόττο με επανάθεση

Πείραμα Τύχης: Επιλογή 6 αριθμών από $\{1, 2, \dots, 49\}$ με επανάθεση

(|6|6|1|1|1|49|) Δελτίο = επιλογή 6 αριθμών με επανάληψη

„Δυνατός" δειγματικός χώρος = σύνολο διατάξεων 49 ανά 6 με επανάληψη

δειγματικών σημείων = 49^6 (ισοπίθανα)

„Φυσικός" δειγματικός χώρος = σύνολο συνδυασμών 49 ανά 6 με επανάληψη (όχι ισοπίθανα)

8) Άσκηση

Κάλπη που έχει n λαχνούς (1 κόκκινο, n-1 λευκά)

Επιλέγονται k χωρίς επανάθεση

P(περιέχεται το κόκκινο) = ;

Δειγματικός χώρος με διατάξεις: $P = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{k\binom{n-1}{k-1}(k-1)!}{\frac{n!}{(n-k)!}} =$

$$= \frac{k \cdot \frac{(n-1)!\,\cancel{(k-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}}}{\frac{n!}{\cancel{(n-k)!}}} = \frac{k}{n}$$