9ο Μάθημα Πιθανοτήτων 10/3/2010

Ασκήσεις στον Πολ/κό Νόμο

① Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\dots P(E_n|E_1E_2\dots E_{n-1})$

υπό την προϋπόθεση $P(E_1E_2\dots E_{n-1})>0$.

② Άσκηση

Κάλπη με 10 άσπρα, 7 μαύρα σφαιρίδια

Τυχαίο πείραμα: Εξαγωγή 4 σφαιρ. (χωρίς επανάθεση)

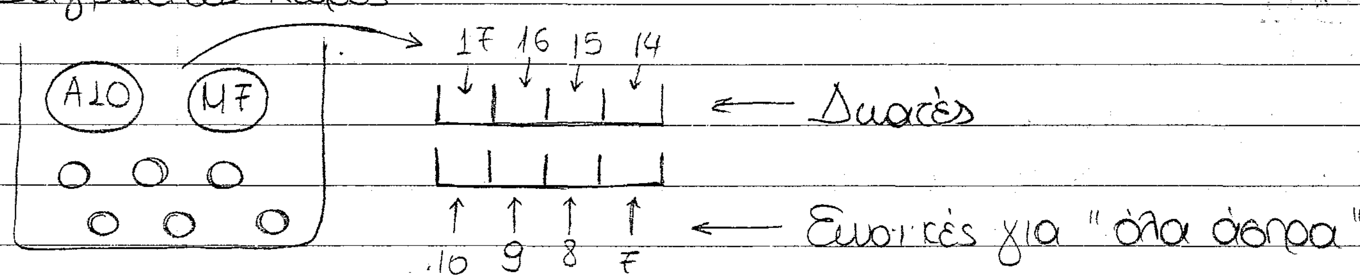
P(όλα τα σφαιρ. άσπρα) =;

P(1ο, 3ο σφαιρ. άσπρα, 2ο, 4ο σφαιρ. μαύρα) =;

1η Λύση (Συνδυαστική)

$P(\text{όλα τα σφαιρ. άσπρα}) = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$ (1)

Δειγματικός χώρος



$(1) \Rightarrow P(\text{όλα τα σφ. άσπρα}) = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{17\cdot16\cdot15\cdot14}$

$P(\text{όλα τα σφ άσπρα}) = \dfrac{\binom{10}{4}\binom{7}{0}}{\binom{17}{4}}$

$P(1^\circ, 3^\circ \text{ άσπρα}, 2^\circ, 4^\circ \text{ μαύρο}) = \dfrac{10\cdot7\cdot9\cdot6}{17\cdot16\cdot15\cdot14}$

1η Λύση (Πολ/κός Νόμος)

$(\text{όλα άσπρα}) = P(1^\circ A)\cdot P(2^\circ A \mid 1^\circ A)\, P(3^\circ A \mid 1^\circ A, 2^\circ A)\, P(4^\circ A \mid 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ A)$

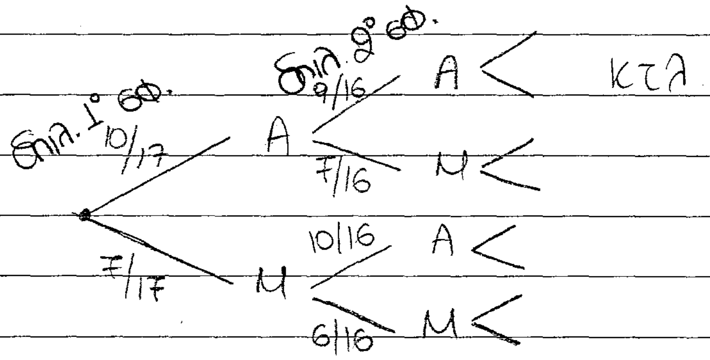
$$= \frac{10}{17}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}$$

$(1^\circ, 3^\circ \text{ άσπρα}, 2^\circ, 4^\circ \text{ μαύρα}) = P(1^\circ A)\cdot P(2^\circ M \mid 1^\circ A)\, P(3^\circ A \mid 1^\circ A, 2^\circ M)\cdot$

$\cdot P(4^\circ M \mid 1^\circ A, 2^\circ M, 3^\circ A) =$

$$= \frac{10}{17}\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}$$

Οπτικοποίηση με Δέντρο

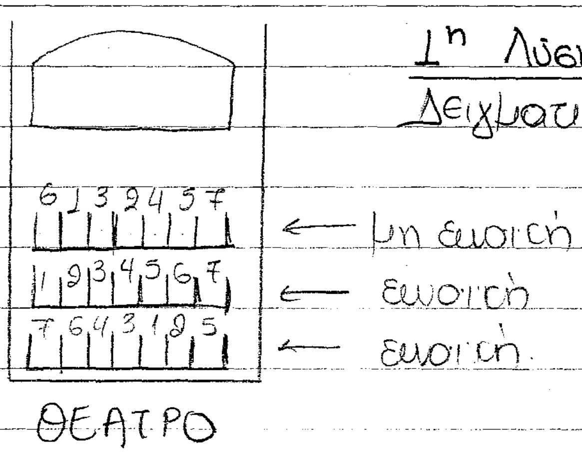


3) Άσκηση

Έχουμε 7 άτομα να καθίσουν σε σειρά 7 καθισμάτων με διπλή πρόσβαση στο θέατρο.

P(να καθίσουν χωρίς να περάσουν μπροστά από άλλον) = ;

Ονομάζω τα άτομα με τη σειρά αφιξής τους.



1η Λύση (Συνδυαστική)

Δειγματικός χώρος S: όλες οι μεταθέσεις του $\{1, \dots, 7\}$, $|S| = 7!$

Ευνοϊκές 7-άδες: Έχουν κάπου το 1, αριστερά του 1 είναι σε φθίνουσα σειρά τα νούμερα, δεξιά του 1 σε αύξουσα.

Ευνοϊκές:

Ευνοϊκές με το 1 για την 1η θέση $= 1$

$+$

— // — για την 2η θέση $= 6$

— // — για την 7η θέση $= \binom{6}{6}$

$= 1 + 6 + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

$= 2^6 = 64$ (από $\sum \binom{n}{k} = 2^n$)

P(κάθονται χωρίς να περάσουν μπροστά από άλλους) $= \dfrac{2^6}{7!}$

2η Λύση (Πολ/κός Νόμος)

P(να καθήσουν χωρίς να περάσουν μπροστά από άλλους) $=$ P(ο επτά κάθεται σε μια άκρη) $\cdot$ P(ο 6 κάθεται σε μια άκρη απ' αυτές που έμειναν /) $\cdot$

$\cdot$ P(ο 5 σε άκρη ... / οι 6, 7 σε άκρη) $\cdot \ldots =$

$= \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{2} = \dfrac{2^6}{7!}$

(4) Άσκηση (παλιά)

52 τραπουλόχαρτα να μοιραστούν σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ) από 13 ο καθένας (π.χ. μοιρασιά Μπριτζ)

P(κάθε παίκτης παίρνει 1 άσσο) $=$;

P"ζητ.

1η Λύση (Συνδυαστική)

Βλ. προηγ. σημειώσεις

2η Λύση (Πολ/κός Νόμος + Συνδ.)

$P_{ζητ.}$ = P(ο Α παίρνει 1 άσσο) · P(ο Β παίρνει 1 άσσο / ο Α πήρε 1 άσσο) · P(ο Γ παίρνει 1 άσσο / οι Α, Β πήραν 2 άσσους) ...

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot 1 = 4!\,\frac{\frac{48!}{(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}}$$

3η Λύση (Πολ/κός Νόμος)

Μοιρασιά ⟶ Τοποθέτηση σε σειρά των 52 φύλλων.

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\dots\square}_{\text{13 φύλλα του Α}} \quad \underbrace{\square\dots\square}_{\text{13 φύλλα του Β}} \quad \underbrace{\square\dots\square}_{\text{13 φύλλα του Γ}} \quad \underbrace{\square\dots\square}_{\text{13 φύλλα του Δ}}$$

P(1 άσσος σε κάθε άτομο) = $\overbrace{P\begin{pmatrix}\text{ο } A^{\diamondsuit} \text{ πάει σε άτομο διαφ.} \\ \text{από αυτό που πήρε } A^{\clubsuit}\end{pmatrix}}^{=E_1}$ ·

E_2 $\overline{\cdot\, P(\text{ο } A^{\heartsuit} \dots A^{\clubsuit}, A^{\diamondsuit} / E_1)}$ ·

$\cdot\, P(\text{ο } A^{\spadesuit} \dots A^{\heartsuit}, A^{\diamondsuit}, A^{\clubsuit} / E_1 E_2)$ =

$$= \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} = \frac{3!\,13^3}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$