Στοχαστική Ανεξαρτησία

Α) Ορισμός

Διαισθητικά:

$$\begin{aligned} E, F \text{ ανεξ.} &\iff P(E/F) = P(E) \\ &\iff \frac{P(EF)}{P(F)} = P(E) \quad (1) \\ &\qquad\quad \text{ή} \\ &\quad P(F/E) = P(F) \iff \\ &\iff \frac{P(EF)}{P(E)} = P(F) \quad (2) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ αυτός ο ορισμός είναι "κακός" γιατί δεν είναι συμμετρικός και θα πρέπει να υπάρχει περιορισμός $P(F) > 0$.

Από (1), (2) $\Rightarrow P(EF) = P(E)P(F)$.

Επομένως:

Ορισμός: E, F ανεξ. $\iff P(EF) = P(E)P(F)$.

Για 3 ενδεχόμενα:

E, F, G ανεξ. $\Leftrightarrow$ $\boxed{P(EFG) = P(E)P(F)P(G)}$

αν ισχύει αυτό είναι 3 ενδ. ανεξ. οι άλλες σχέσεις είναι περιττές.

Προκύπτει για $G=S$ δx. $F=S$ $E=S$

$$\begin{cases} P(EF) = P(E)P(F) \\ P(EG) = P(E)P(G) \\ P(FG) = P(F)P(G) \end{cases}$$

Γενικά:

$E_1, E_2, \ldots$ ανεξ. $\Leftrightarrow$ Για κάθε $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_r}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\ldots P(E_{i_r})$$

② Ανεξάρτητα - Ασυμβίβαστα

E, F

ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(EF) = P(E)P(F)$

ασυμβίβαστα $\Leftrightarrow EF = \emptyset \Rightarrow P(EF) = 0$

③ Ανεξάρτητα - Ανεξάρτητα ανά δύο

Συμπίπτουν για δύο ενδεχ.

Από 3 και πάνω όχι.

E, F, G

Ανεξ. $\Leftrightarrow P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

$$\text{Ανεξ. ανά 2} \Leftrightarrow \begin{matrix} P(EF) = P(E)P(F) \\ P(EG) = P(E)P(G) \\ P(FG) = P(F)P(G) \end{matrix}$$

4) Παράδειγμα

Τράπουλα με 52 φύλλα - Επιλογή ενός φύλλου

E: είναι Άσσος , F: είναι ♣.

$$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(F) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(EF) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(E)P(F) \Rightarrow \underline{E, F \text{ ανεξ.}}$$

Παραλλαγή: Έστω ότι έλειπε στην αρχή ο Α ♠

51 φύλλα - Επιλέγω ένα φύλλο.

E: είναι Άσσος , F: είναι ♣

$$P(E) = \frac{3}{51}, \qquad P(F) = \frac{13}{51}$$

$$P(EF) = \frac{1}{51} \neq \frac{3}{51} \cdot \frac{13}{51} = P(E) \cdot P(F) \Rightarrow \underline{E, F \text{ όχι ανεξ.}}$$

$$\left.\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{51}}{\frac{13}{51}} = \frac{1}{13} \\ P(E) &= \frac{3}{51} \end{aligned}\right\} \underline{P(E|F) > P(E)}$$

5) Παράδειγμα

Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 ζαριών

E: άθροισμα ενδείξεων είναι 7

F: το 1ο ζάρι φέρνει 4

G: το 2ο ζάρι φέρνει 3

H: άθροισμα ενδείξεων είναι 6.

$\{(1,6),(2,5),\dots,(6,1)\}$ $\{(1,5),\dots,(5,1)\}$

$P(E) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$, $P(F) = \dfrac{1}{6} = P(G)$, $P(H) = \dfrac{5}{36}$

$P(EF) = \dfrac{1}{36} = P(E)P(F) \Rightarrow E, F$ ανεξ. !

$P(EG) = \dfrac{1}{36} = P(E)P(G) \Rightarrow E, G$ ανεξ.

$P(FG) = \dfrac{1}{36} = P(F)P(G) \Rightarrow F, G$ ανεξ.

E, F, G ανά 2 ανεξ.

Αλλά: $P(EGF) = \dfrac{1}{36} \neq \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = P(E)P(G)P(F)$

Επομένως: E, F, G όχι ανεξάρτητα

$P(HF) = \dfrac{1}{36} \neq \dfrac{5}{36}\cdot\dfrac{1}{36} = P(H)P(F) \Rightarrow H, F$ όχι ανεξάρτητα.

6) Άσκηση

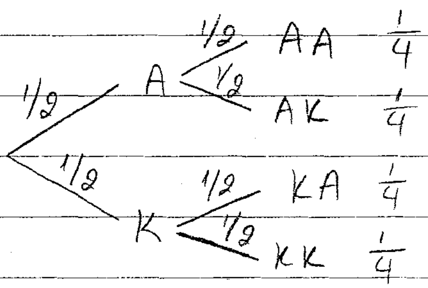
Οικογένεια με 2 παιδιά – Επισκέπτης στην οικογένεια –
– Χτυπάει το κουδούνι – Τυχαία ανοίγει κάποιο απ' τα παιδιά.

P(το άλλο παιδί κορίτσι | το ένα παιδί είναι κορίτσι) = ;

P(| το πρωτότοκο κορ.) = ;

P(| το παιδί που άνοιξε είναι κορ.) = ;

Τυχαίο Πείραμα: φύλο των παιδιών



Δ.χ. $S = \{\underbrace{AA, AK, KA, KK}_{\text{ισοπίθανα}}\}$

G_1 : το πρωτότοκο είναι κορίτσι

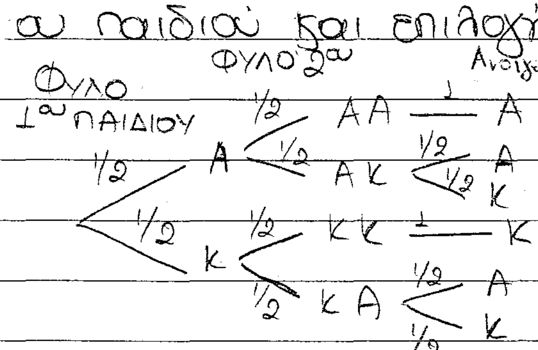
G_2 : -"- δευτερότοκο -"-

G : να είναι και τα 2 κορίτσια

$$P(G / G_1 \cup G_2) = \frac{P(G \cap (G_1 \cup G_2))}{P(G_1 \cup G_2)} = \frac{P(\{KK\})}{P(\{AK, KA, KK\})} = \frac{1/4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(G / G_1) = \frac{P(G G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(G)}{P(G_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Επιλογή φύλου παιδιού και επιλογή παιδιού που ανοίγει πόρτα.



$$P(\text{το άλλο παιδί κορ.} / \text{ανοίγει κορίτσι}) = \frac{P(\text{και τα 2 παιδιά κορ.})}{P(\text{ανοίγει κορίτσι})} =$$

$$= \frac{1/4}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

άνοιξε κορίτσι

$$P(G/F) = \frac{P(GF)}{P(F)} = \frac{P(G)}{P(F)} \quad (1)$$

$$P(F) = P(G_1 G_2) P(F / G_1 G_2) + P(G_1 G_2^c) P(F / G_1 G_2^c) +$$
$$+ P(G_1^c G_2) P(F / G_1^c G_2) + P(G_1^c G_2^c) P(F / G_1^c G_2^c) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$P(G) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

7 Άσκηση

3 κάρτες : κοκ-κοκ

κοκ-μπλε

μπλε-μπλε

Πείραμα: Διαλέγεται τυχαία κάρτα

Δείχνεται τυχαία η μια πλευρά της

P(η άλλη πλευρά μπλε / η πλευρά που δείχνεται είναι μπλε) = ;