⑦ Άσκηση

3 κάρτες : κοκ - κοκ
κοκ - μπλε
μπλε - μπλε

Πείραμα: Διαλέγεται τυχαία κάρτα
Δείχνεται τυχαία η μια πλευρά της

P(η άλλη πλευρά μπλε / η πλευρά που δείχνεται είναι μπλε) = ;

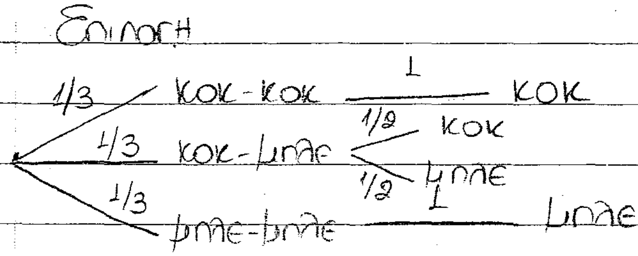
12ο Μάθημα Πιθανοτήτων 19/3/2010

Ασκήσεις

① Άσκηση (⑦ Άσκηση / προηγ. μάθημα)

P(η άλλη πλευρά μπλε / η πλευρά που δείχνεται είναι μπλε) = ;

Πείραμα τύχης: Επιλογή κάρτας
Επίδειξη μιας πλευράς



$$P(\text{η άλλη πλευρά μπλε} / \text{η πλευρά που δειχν. είναι μπλε}) = \frac{P(\text{επιλ. μπλε-μπλε})}{P(\text{η πλευρά που δείχνω μπλε})}$$

$$\begin{aligned} P(\text{πλευρά που δείχνω μπλε}) &= P(\text{επιλ. η κοκ-κοκ})\,P(\text{δείχνω μπλε} / \text{ ''}) + \\ &+ P(\text{επιλ. η κοκ-μπλε})\,P(\text{δείχνω μπλε} / \text{ ''}) + \\ &+ P(\text{επιλ. η μπλε-μπλε})\,P(\text{δείχνω μπλε} / \text{ ''}) = \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

P(επιλ. μπλε-μπλε) $= \frac{1}{3}$, $P_{ζητ.} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$

2) Ανεξάρτητες δοκιμές

Ανεξάρτητες δοκιμές = Επανάληψη πειράματος με ανεξ. αποτελ.

π.χ. Ρίψη νομίσματος

Ρίψη ζαριού

) Άσκηση

Έχω παίκτες Α, Β. Ρίχνουν νόμισμα εναλλάξ

Ο 1ος που φέρνει Κ κερδίζει

P(φέρνει ο Α Κ) = P(φέρνει ο Β Κ) $= p$

ρίψεις ανεξ. , P(κερδίζει ο Α) = ;

Πείραμα τύχης:

Δ.χ. = {Κ, ΓΚ, ΓΓΚ, ΓΓΓΚ, ...}

Κ → κερδ. ο Α, ΓΚ → κερδ. ο Β, ΓΓΚ → κερδ. ο Α, ΓΓΓΚ → κερδ. ο Β

P(κερδ. ο Α) = P(έρχεται Κ για 1η φορά σε περιττή ρίψη) =

$$= p + (1-p)^2 p + (1-p)^4 p + (1-p)^6 p + \dots =$$

$$= p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{2i} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p} \quad ✓$$

Για $p = \frac{1}{2}$: P(κερδ. ο Α) $= \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$ (μεγαλύτερη η πιθανότητα να κερδ. ο Α, αφού παίζει πρώτος)

2η Λύση:

E: ενδεχόμενο κερδίζει ο Α   F: ενδεχόμενο κερδίζει ο Β.

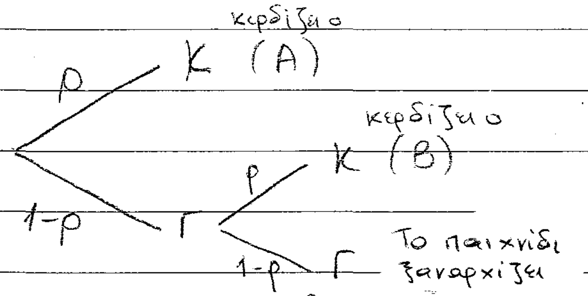
Θ.Ο.Π. $\Rightarrow P(E) \overset{*}{=} \underbrace{P(F)}_{p} \underbrace{P(E|F)}_{1} + \underbrace{P(F^c)}_{1-p} \underbrace{P(E|F^c)}_{1-P(E)}$

$$\Rightarrow P(E) = p + (1-p)(1-P(E)) = p + (1-p) - (1-p)P(E)$$

$$\Rightarrow (2-p)P(E) = 1 \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2-p} \quad ✓$$

⊛ Δέσμευση στο 1ο Στάδιο: - Ανάλυση 1ου βήματος

- Αναγεννητικός συλλογισμός.



$P(E) = p \cdot 1 + (1-p)p \cdot 0 + (1-p)(1-p) \cdot P(E)$

④ Άσκηση

3 παίκτες A, B, Γ

Ρίχνουν νομίσματα διαδοχικά αρχίζ. απ' τον A, μετά ο B, μετά ο Γ.

P(K για τον A) = p

P(K B) = q

P(K Γ) = r

Κερδίζει ο 1ος με K. , P(κερδ. ο A)

1η Λύση:

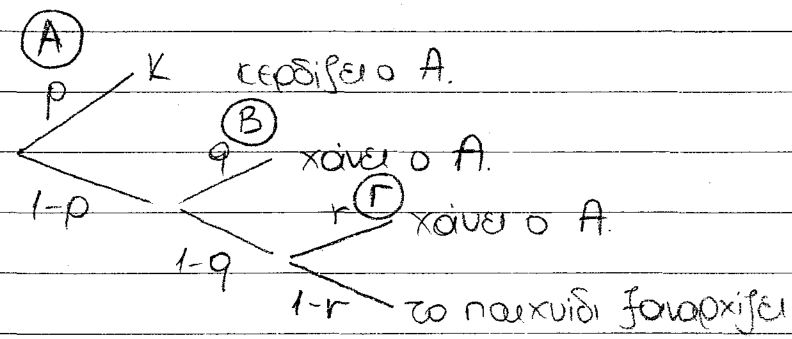
3k+1

P(κερδ. ο A) = P(1η φορά K σε κάποια απ' τις 1, 4, 7, 10)

$$= p + (1-p)(1-q)(1-r)p + \left((1-p)(1-q)(1-r)\right)^2 p + \dots$$

$$= p \sum_{i=0}^{\infty} \left((1-p)(1-q)(1-r)\right)^i = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$

2η Λύση:



$P(\text{κερδ. ο A}) = P(\text{K στην } 1^{η}) P(\text{κερδ. ο A} \mid \text{κορ. στην } 1^{η}) +$
$+ P(\text{K στην } 2^{η} \text{ ρίψη κ όχι στην } 1^{η}) \cdot P(\text{κερδ. ο A} \mid \cdot) +$
$+ P(\text{K στην } 3^{η} \text{ ρίψη κ' όχι στην } 1^{η} \text{ κ' } 2^{η}) P(\text{κερδ. ο A} \mid \cdot) +$
$+ P(\text{όχι κ στις 3 πάντες}) P(\text{κερδ. ο A} \mid \cdot) =$
$= p \cdot 1 + (1-p)q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot r \cdot 0 + ((1-p)(1-q)(1-r) \cdot$
$\cdot P(\text{κερδ. ο A})$

$$\Rightarrow P(\text{κερδ ο A}) = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$

5) Άσκηση

Ρίχνουμε 2 ζάρια κατ' επανάληψη
Βλέπει το άθροισμα της ζαριάς
P(έρχεται άθροισμα 5 πριν έρθει άθρ. 7) =;

$1^{η}$ Λύση:

$$P\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix}\text{έρχεται άθροισμα 5}\\ \text{πριν έρθει άθροισμα 7}\end{matrix}}}_{=E}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)(1),$$ όπου E_i: στις ρίψεις $1, \dots, i-1$ δεν έχει εμφ. 5 ούτε 7 και στη ρίψη i εμφ. το 5.

$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

Σε μια ρίψη $\Rightarrow P(\text{αθρ. } 5) = \dfrac{4}{36}$

$P(\text{ούτε αθρ. 5 ούτε 7}) = \dfrac{26}{36}$

$P(\text{αθρ. } 7) = \dfrac{6}{36}$

$$(1) \overset{E_i \text{ ασυμβ.}}{=\!=} \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36} = \frac{\frac{4}{36}}{1-\frac{26}{36}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$2^{η}$ Λύση:

A_1: $1^{η}$ ρίψη είναι 5
A_2: 7
A_3: ούτε 5 ούτε 7.

$$P(E) = \underbrace{P(A_1)}_{4/36}\underbrace{P(E|A_1)}_{1} + \underbrace{P(A_2)}_{6/36}\underbrace{P(E|A_2)}_{0} + \underbrace{P(A_3)}_{26/36}P(E|A_3) = \quad \cdot P(E)$$

$$\left(1 - \frac{26}{36}\right)P(E) = \frac{4}{36} \Rightarrow P(E) = \frac{\frac{4}{36}}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{2}{5}$$

⑥ Η δεσμευμένη πιθανότητα ως νέο μέτρο πιθανότητας

Δοθέντων:
- S : δειγμ. χώρος
- F : ενδεχομ. $(F \subseteq S)$ $\xrightarrow{\text{ορίζω}}$ $P_F(E) = P(E|F)$
- P : πιθαν.

Τότε: η P_F είναι πιθαν.

(i) $0 \le P_F(E) \le 1$

(ii) $P_F(S) = 1$.

(iii) $P_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_F(E_i)$ για E_i ασυμβ.

Άρα μπορώ να χρησιμοποιώ όλα τα θεωρήματα με δέσμευση ως προς κάποιο ενδεχόμενο.

Π.χ. $P(E_1 E_2 E_3 \ldots E_n | F) = P(E_1|F)P(E_2|E_1 F)P(E_3|E_1 E_2 F)\ldots$
$\ldots P(E_n|E_1 E_2 \ldots E_{n-1} F)$.

$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβ. $\Rightarrow P(E|F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i|F)P(E|F_i F)$

$$P(A \cup B | F) = P(A|F) + P(B|F) - P(AB|F).$$