13ο Μάθημα Πιθανοτήτων 22/3/2010

Τυχαίες Μεταβλητές και Συνάρτηση Κατανομής

) Τυχαία Μεταβλητή

Πείραμα τύχης

Διαισθ. Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.) → Αριθμητικό χαρ. του πειράματος

Μαθημ. → Συνάρτηση $X : S \to \mathbb{R}$

(S: δειγμ. χώρος)

) Παράδειγμα 1

Ρίψη δίκαιου νομ. 3 φορές

Ανεξ.)

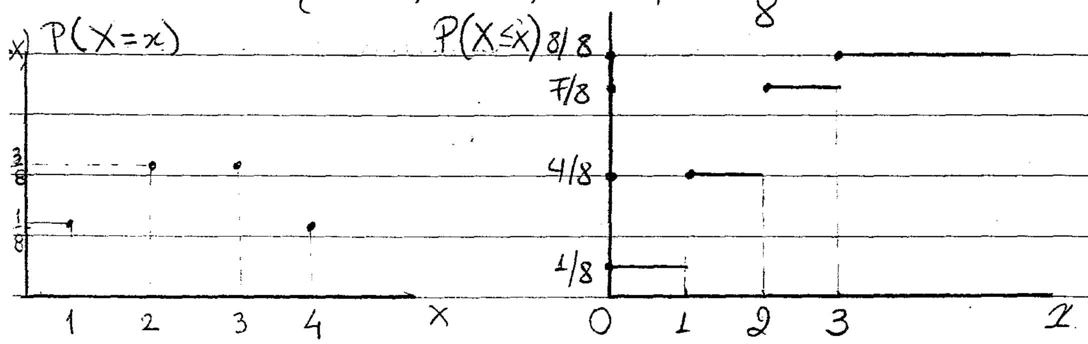
Δειγμ. Χώρος $S = \{ККК, ККГ, КГК, КГГ, ГКК, ГКГ, ГГК, ГГГ\}$

$X = \#K$

ККК	ККГ	КГК	КГГ	ГКК	ГКГ	ГГК	ГГГ
3	2	2	1	2	1	1	0

$P(X=0) = P(\{ГГГ\}) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = P(\{КГГ, ГКГ, ГГК\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P(\{ККГ, КГК, ГКК\}) = \frac{3}{8}$ $P(X=3) = P(\{ККК\}) = \frac{1}{8}$



(3) Παράδειγμα 2

Ανεξ. ρίψεις νομίσματος με πιθαν. $K = p$ μέχρι να έρθει η πρώτη κορώνα ή να γίνουν n επαναλήψεις

$$S = \{K, \Gamma K, \Gamma\Gamma K, \ldots, \underbrace{\Gamma\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n-1}K, \underbrace{\Gamma\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n}\}$$

$$\mathbb{R} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n \quad n$$

X = # ρίψεων που απαιτούνται για να ολοκληρ. το πείραμα.

X: παίρνει τιμές στο $\{1, \ldots, n\}$

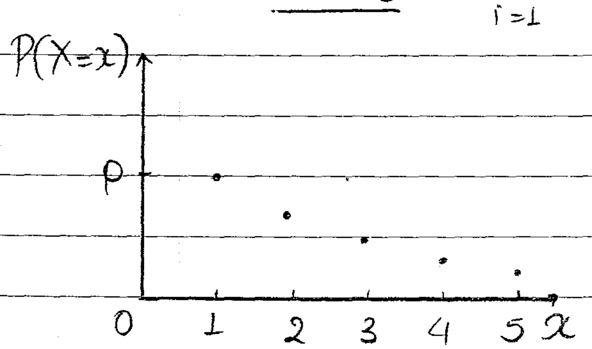
$$P(X=i) = P(\{\underbrace{\Gamma\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{i-1}K\}) = (1-p)^{i-1}\cdot p, \quad 1 \le i \le n-1$$

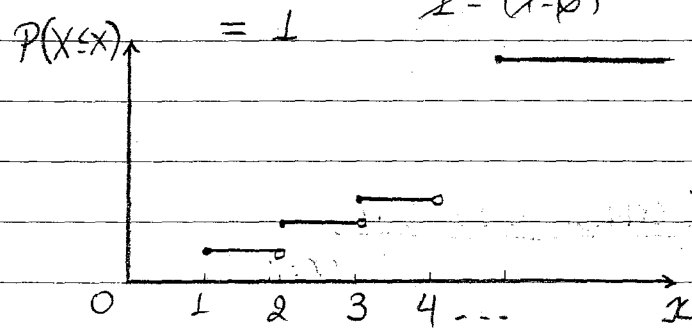
$$P(X=n) = P(\{\underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n-1}K, \underbrace{\Gamma\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n}\}) = (1-p)^{n-1}p + (1-p)^{n} = (1-p)^{n-1}$$

$P(X \ge x) \ge 0.$

Ελέγχω: Πρέπει: $\sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1}p + (1-p)^{n-1} = 1$

Όντως: $\sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1}p + (1-p)^{n-1} = \cancel{p}\,\dfrac{1-(1-p)^{n-1}}{\cancel{1-(1-p)}} + \cancel{(1-p)^{n-1}} = 1$

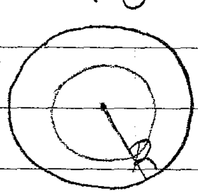




(4) Παράδειγμα 3

Πείραμα Τύχης:

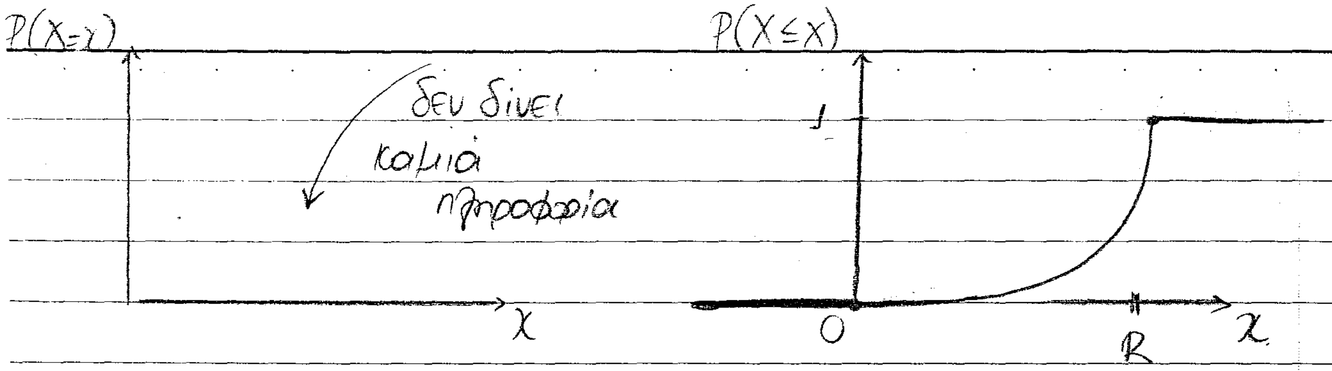
Επιλογή τυχαίου σημείου σε κυκλικό δίσκο ακτίνας R.



X = απόσταση του σημείου από το κέντρο του κυκλικού δίσκου.

$P(X=x) = 0$ για κάθε $x \in [0,R]$.

$$P(X \le x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \left(\frac{x}{R}\right)^2, \quad x \in [0,R]$$



5) Συμπεράσματα

Διαφορετική προσέγγιση: όπου η τ.μ. παίρνει διακριτές ή συνεχείς τιμές

Η $P(X=x)$ καλή για διακριτές, κακή (= πάντα 0) για συνεχείς.

Η $P(X\leq x)$ έχει νόημα πάντα, τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

6) Ορισμός

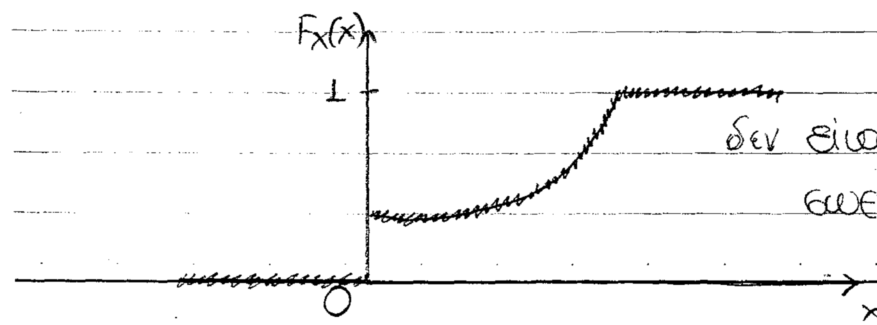
Έστω X τ.μ. Ορίζουμε: $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

Λέγεται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της X.

7) Ιδιότητες της σ.κ.

1) $F_X(x)$ ↗ (αύξουσα)
2) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
3) $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$
4) Η $F_X(x)$ είναι δεξιά συνεχής: $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
5) Για διακριτές τ.μ. είναι κλιμακωτή συν/ση
6) Για συνεχείς τ.μ. είναι συνεχής συν/ση



δεν είναι ούτε κλιμακωτή ούτε συνεχής ⇒ μεικτή τ.μ.

7) $\lim\limits_{x\to x_0^-} F_X(x) = P(X<x_0)$

8) $P(X=x_0)=F_X(x_0)-\lim\limits_{x\to x_0^-}F_X(x)$

9) $P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$, για $a\le b$.

$A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

⑧ Αποδείξεις

1) Έστω $x\le y \Rightarrow (-\infty,x]\subseteq(-\infty,y] \Rightarrow P(X\le x)=P(X\in(-\infty,x])\le$
$P(X\le(-\infty,y])=P(X\le y) \Rightarrow$
$\Rightarrow F_X(x)\le F_y(y)$

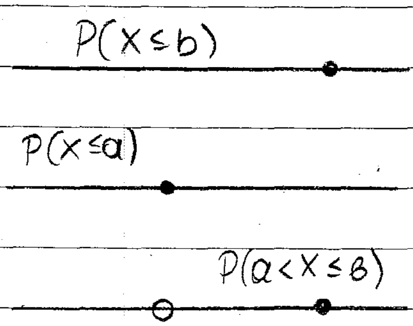
2) Αρχή Μεταφοράς $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$
$\Updownarrow$
$\forall$ ακολ. $x_n\to x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$

Παίρνω $x_n\to\infty$, αύξουσα
$(-\infty,x_1]\subseteq(-\infty,x_2]\subseteq(-\infty,x_3]\subseteq\dots$

$\lim\limits_{n\to\infty} F_X(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} P(X\le x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} P(\underbrace{X\in(-\infty,x_n]}_{\text{Αν ↑ αύξουσα ακολ. ενδεχ.}})=$

$=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\in(-\infty,x_n]\}\right)=P(X\in\mathbb{R})=1$

9) $P(a<X\le b)= P(\{X\in(-\infty,b]\}\cap\{X\in(-\infty,a]^c\})$
$= P(\{X\in(-\infty,b]\})-P(\{X\in(-\infty,a]\})$
$= F_X(b)-F_X(a)$.



$F_X(b)$

$F_X(a)$

$F_X(b)-F_X(a)$

$P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a)+\underbrace{P(X=a)}_{F_X(a)-F_X(a^-)}=F_X(b)-F_X(a-)$

$P(a\le X<b)=F_X(b^-)-F_X(a^-)$

$P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$

$P(a<X<b)=F_X(b^-)-F_X(a)$