14ο Μάθημα Πιθανοτήτων — 24/3/2010

⇒ Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

① Ορισμός

X διακριτή τ.μ. $\overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \exists \{x_0, x_1, x_2, \dots\} : P(X \in \{x_0, x_1, \dots\}) = 1$

Η συνάρτηση

$$P(x) = \begin{cases} P(X=x_i), & x = x_i \text{ για κάποιο } i \\ & \\ 0, & x \neq x_i \text{ για κάποιο } i \end{cases} = P(X=x)$$

λέγεται <u>συνάρτηση πιθανότητας</u> του X (σ.π.).

<u>Σχέση σ.κ. με σ.π.</u>

$P(x) = P(X=x)$

$F(x) = P(X \leq x) \Rightarrow F(x) = \sum_{y \leq x} P(y)$

$p(x) = F(x) - \underbrace{F(x^-)}_{\lim_{y \to x^-} F(y)}$, $P(x \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$

② Ιδιότητες

i) $p(x) \geq 0$

ii) $\sum_{x} p(x) = 1$

③ Παράδειγμα 1

X = # επισκ. σε μια Τράπεζα σε 1 ημέρα

$P(X=x) = c \cdot \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$ όπου λ: σταθερά γνωστή

σταθ. άγνωστη

i) $c = ;$

ii) $P(X=0) = ;$

iii) $P(X \geq 2) = ;$

iv) $P(X=3 / X \geq 2) = ;$

i) $\sum_x p(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = 1 \Rightarrow c \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1 \Rightarrow c = e^{-\lambda}$

$P(X=x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

ii) $P(X=0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

iii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$

iv) $P(X=3 / X \geq 2) = \frac{P(\overbrace{X=3 \ X \geq 2}^{X=3})}{P(X \geq 2)} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!}}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}$

④ Μέση Τιμή

X = τ.μ. = χαρακτηριστικό κάποιου πειρ.

Διαισθ.: Μέση Τιμή της $X = \frac{\text{Άθρ. } n \text{ μετρήσεων του χαρακτηρ.}}{n}$

$p(x) = P(X=x)$ = Ποσοστό του πληθυσμού που αντιστοιχεί στην τιμή x του χαρακτηριστικού

Έστω ότι έχουμε πληθυσμό μεγέθους N

$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots$

(N_0:) πλήθος ατόμων με $X=0$ (όμοια τα υπόλοιπα)

$P(X=x) = \frac{N_x}{N}$, Μέση Τιμή της $X = \frac{\overbrace{0+0+0+\ldots+0}^{N_0}+\overbrace{1+\ldots+1}^{N_1}+\overbrace{2+\ldots}^{N_2}}{N}$

$= \frac{0 \cdot N_0 + 1 N_1 + 2 N_2 + \ldots}{N} =$

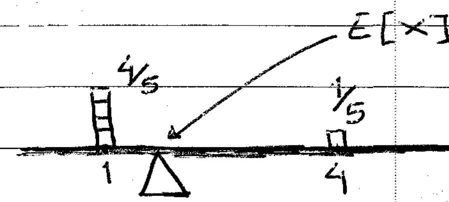
$= 0 \underbrace{\frac{N_0}{N}}_{P(0)} + 1 \cdot \underbrace{\frac{N_1}{N}}_{P(1)} + 2 \underbrace{\frac{N_2}{N}}_{P(2)} + \ldots$

Μαθηματικός Ορισμός

Μέση τιμή της X : $E(x) = \sum_x x \cdot p(x)$

Υπό την προϋπόθεση ότι $\sum_x |x| p(x) < +\infty$

2η Διαισθ. Ερμηνεία : Κέντρο Βάρους



π.χ. $x \in \{1,4\}$

$P(X=1) = \frac{4}{5}$

$P(X=4) = \frac{1}{5}$

$E[X] = \sum_x x p(x) = 1 \cdot p(1) + 4 p(4) = 1 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$

3η Ερμηνεία

X = κέρδος   E[X] : μέσο κέρδος

π.χ. Παιχν. : Ρίψη νομίσματος 2 φορές

2Κ → 4 € κερδίζω

1Κ → 2 € χάνω   X = # κορ.

0Κ → 1 € χάνω

$E(x) = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{4} \cdot 4 = -\frac{1}{4} - \cancel{1} + \cancel{1} = -\frac{1}{4}$

Χάνω $-\frac{1}{4}$ ανά επανάληψη του παιχνιδιού

5) Παράδειγμα

Ρίψη ζαριών

X = ένδειξη που ήρθε

$E[X] = \sum_x x p(x) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$

x	p(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

(6) Παράδειγμα 3

Τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο $= S$

$A \subseteq S$ ενδεχόμενο

Δείκτρια $\rightarrow$ $I_A = \begin{cases} 0, & A \text{ δεν πραγματ.} \\ 1, & A \text{ πραγματ.} \end{cases}$

(Δείκτριες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε να γίνεται η μετάβαση
$P(A) \rightarrow E[I_A]$)

$$E[I_A] = 0 \cdot P(I_A = 0) + 1 \cdot P(I_A = 1) = P(I_A = 1) = P(A)$$

(7) Παράδειγμα 4

Διαγωνιζόμενος θα απαντήσει σε 2 ερωτήσεις: 1 Γεωγραφία
1 Ιστορία

P(απάντ. σωστά στην Γεωγρ.) $= p_1$ Αμοιβή για Γεωγρ. $= V_1$

P(—— // —— Ιστορία) $= p_2$ Αμοιβή για Ιστορία $= V_2$

Συνεχίζει στην 2η ερώτηση μόνο αν απαντήσει σωστά στην 1η!!

Τι είναι συμφέρον να κάνει; Να αρχίσει με Γεωγρ. ή Ιστορία

$X =$ Κέρδη αν αρχίσει με Γεωγρ., $X \in \{0, V_1, V_1 + V_2\}$

$P(X = x)$: $1 - p_1$, $p_1(1-p_2)$, $p_1 p_2$

$$E[X] = \sum_x x p(x) = 0 \cdot (1 - p_1) + V_1 p_1 (1-p_2) + (V_2 + V_1) p_1 p_2$$

$Y =$ Κέρδη αν αρχίσει με Ιστορία, $Y \in \{0, V_2, V_1 + V_2\}$

$P(Y = y)$: $1 - p_2$, $p_2(1-p_1)$, $p_1 p_2$

$$E[Y] = 0(1 - p_2) + V_2 p_2 (1-p_1) + (V_1 + V_2) p_1 p_2$$

Συμφέρει να αρχίσει με Ιστορία αντί Γεωγραφίας $\Leftrightarrow E[Y] \geq E[X]$

$$\Leftrightarrow V_2 p_2 (1 - p_1) + \cancel{(V_1 + V_2) p_1 p_2} \geq V_1 p_1 (1 - p_2) + \cancel{(V_1 + V_2) p_1 p_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_2 p_2}{1 - p_2} \geq \frac{V_1 p_1}{1 - p_1} \Longleftrightarrow \underbrace{V_2}_{\text{Αμοιβή Ιστορ}} \underbrace{\frac{p_2}{1 - p_2}}_{\text{odds Ιστορ}} \geq \underbrace{V_1}_{\text{Αμοιβή Γεωγρ}} \underbrace{\frac{p_1}{1 - p_1}}_{\text{odds Γεωγρ.}}$$

Π.χ. $p_1 = 40\%$ $\quad p_2 = 60\%$

$U_1 = 100$ $\quad U_2 = 80$

Άρα: $\dfrac{U_2\, p_2}{1-p_2} = \dfrac{80 \cdot 0,6}{0,4} = \dfrac{80 \cdot 6}{4} = 120$

$\dfrac{U_1\, p_1}{1-p_1} = \dfrac{100 \cdot 0,4}{0,6} = 66,66$

$\Rightarrow$ Συμφέρει να αρχίσει με Ιστορ.

8 Παράδειγμα 5

Φοιτητική εκδρομή με 3 πούλμαν

1ο: 50 φοιτ.

2ο: 40 φοιτ.

3ο: 48 φοιτ.

Τυχαίο Πείραμα: 1ο Επιλέγω τυχαία πούλμαν, X = # φοιτ. στο πούλμ.

2ο —״— φοιτητή, Y = # φοιτ. στο πούλμαν του φοιτ. που επιλέχθ.

$E[X] = ;$ $\quad E[Y];$