15ο Μάθημα Πιθανοτήτων — 26/3/2010

Μέση Τιμή - Διασπορά

① Μέση Τιμή

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p(x) = P(X=x)$

$$E[X] = \sum_x x\,p(x) \longleftarrow \text{Μέσο θέσης της τ.μ.}$$

② Διασπορά

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p(x) = P(X=x)$ και $\mu = E[X]$

Διασπορά $\longrightarrow$ $Var[X] = E[(X-\mu)^2] \longleftarrow$ Μέτρο μεταβλητότητας της τ.μ.

③ Παράδειγμα

Παίρνω: X

x	-1	0	1
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y

y	-100	0	100
$p(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Z

z	-100	0	10
$p(z)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{998}{1000}$	$\frac{1}{10}$

Για όλες $\mu = 0$

$E[X] = (-1)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} =$

$E[Y] = 0$

$E[Z] = 0$

$Var[X] = E((X-\mu)^2) = E[X^2] = P(X^2=1)\cdot 1 + P(X^2=0)\,0 = \frac{1}{2}$

$Var[Y] = E((Y-\mu)^2) = E[Y^2] = P(Y^2=100^2)\cdot 100^2 + P(Y^2=0)\cdot 0 = 5.000$

$Var[Z] = E((Z-\mu)^2) = E[Z^2] = P(Z^2=100^2)\cdot 100^2 + P(Z^2=0)\cdot 0 =$

$= 10000 \cdot \frac{2}{1000} = 20$

④ Μέση Τιμή Συνάρτησης τ.μ.

X τ.μ. διακριτή με σ.π. $p(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Y = g(X)$ τ.μ. διακριτή

$E[Y] = E[g(X)] = ;$

Π.χ. $X \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

x	-2	-1	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

και $g(x) = x^2$

$Y = g(X) = X^2 \in \{0, 1, 4\}$

Έχουμε:

y	0	1	4
$p_Y(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

$$E[Y] = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{5}{18} + 4\cdot\frac{7}{18} \Rightarrow E[Y] = \frac{33}{18}$$

1ος τρόπος: $p_X(x) \to p_Y(y) \to E[Y]$

2ος τρόπος: $p_X(x) \longrightarrow E[Y]$

Θεώρημα

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$$

Στο παράδειγμα: $E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = (-2)^2\cdot\frac{1}{6} + \boxed{(-1)^2\frac{1}{6}} + 0\cdot\frac{1}{3} + \boxed{1\cdot\frac{1}{9}} + 4\cdot\frac{2}{9} = \frac{33}{18}$

Απόδειξη Θεωρήματος

$Y = g(X)$

$$E[g(X)] = E[Y] \overset{\text{ορσ}}{=} \sum_y y\, p_Y(y) = \sum_y y \sum_{x:g(x)=y} p_X(x) = \sum_y \sum_{x:g(x)=y} y\cdot p_X(x) =$$

$$= \sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)\, p_X(x) = \sum_x g(x)\cdot p_X(x)$$

ΔΕΝ ισχύει: $E[g(X)] = g(E[X])$

Π.χ. $E[X^2] \neq E[X]^2$

$E[3X^2 e^X] \neq 3E[X]^2\, e^{E[X]}$

(5) Ιδιότητες Μέσης Τιμής και Διασποράς

X διακριτή τ.μ. , $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

(1) $E[Y] = aE[X] + b$ και (2) $Var[Y] = a^2 Var[X]$ (Δηλαδή ισχύει το προηγ. θεώρημα μόνο αν Y γραμμική)

γραμμικότητα της μέσης τιμής

π.χ X = ύψος σε cm
Y = ύψος σε feet
$Y = aX$
$\Rightarrow E[Y] = a \cdot E[X]$

π.χ X = θερμοκρασία σε °C
Y = — " — °F
$Y = 32 + \frac{9}{5}X$
$E[Y] = 32 + \frac{9}{5}E[Y]$

Απόδειξη (1), (2)

$$E[aX+b] = \sum_x (ax+b)p_x(x) = \sum_x ax\,p_x(x) + \sum b\,p_x(x)$$
$$= a\sum_x x \cdot p_x(x) + b\sum_x p_x(x) = aE[X] + b.$$

$$Var[aX+b] = E[(aX+b-E[aX+b])^2] = E[(aX+b-aE[X]-b)^2]$$
$$= E[a^2(X-E[X])^2] = a^2E[(X-E[X])^2] = a^2 Var[X].$$

(6) Εναλλακτικός Υπολογισμός της Διασποράς

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

Απόδειξη

Έστω $\mu = E[X]$

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2)p(x) =$$

$$= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) = E[X^2] - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

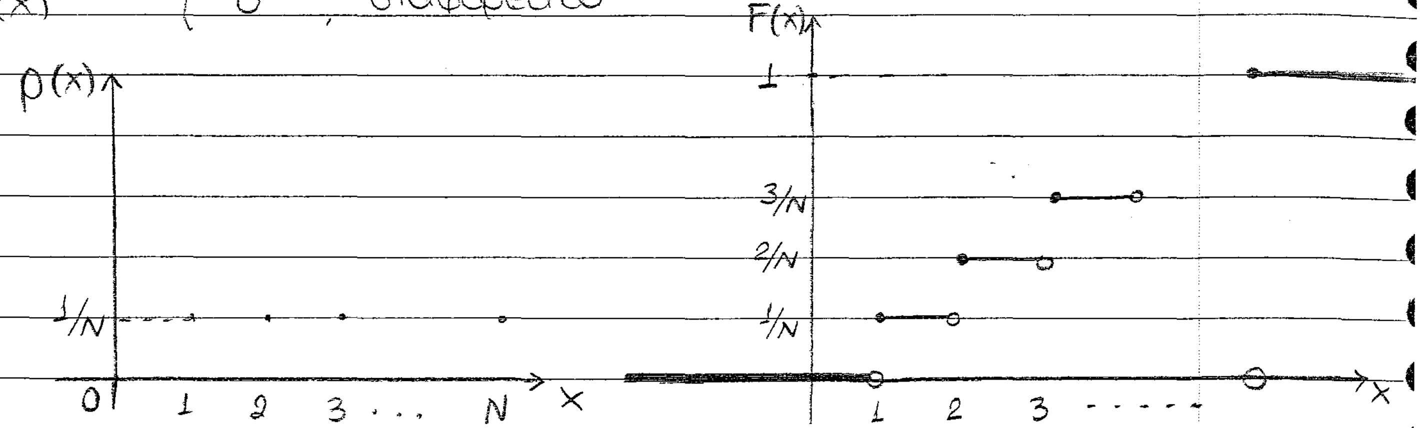
7) Ομοιόμορφη Διακριτή Κατανομή

Πείραμα Τύχης: τυχαία επιλογή αριθμού από το 1 έως το N.

X = αριθμός που επιλέχθηκε, $P(X \in \{1, \dots, N\}) = 1$

$$P(X=x) = \begin{cases} 1/N, & x = 1, 2, \dots, N \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$p(x)$



$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor}{N}, & 1 \le x < N \\ 1, & x \ge N \end{cases}$$

$$E[x] = \sum_x x\,p(x) = \sum_{x=1}^{N} x \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N}(1+2+\dots+N) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}(N+1)}{2} \Leftrightarrow \boxed{E[x] = \frac{N+1}{2}}$$

$$Var[x] = E[x^2] - E[x]^2$$

$$E[x^2] = \sum_x x^2 p(x) = \sum_{x=1}^{N} x^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}(1^2 + 2^2 + \dots + N^2) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\Rightarrow Var[x] = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{(N+1)}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)(N+1)}{4} =$$

$$= (N+1)\frac{4N+2-3N-3}{12} = \frac{(N+1)(N-1)}{12} \Leftrightarrow \boxed{Var[x] = \frac{N^2-1}{12}}$$

8) Άσκηση (προηγ. με πούλμαν)

X = # φοιτ. του πούλμαν $\quad$ Y = # φοιτ. του πούλμαν του φοιτητή

X:

x	50	48	40
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y:

y	50	40	48
$P(Y=y)$	$\frac{50}{138}$	$\frac{40}{138}$	$\frac{48}{138}$

$$E[X] = 50\cdot\frac{1}{3} + 48\cdot\frac{1}{3} + 40\cdot\frac{1}{3} < E[Y] = 50\cdot\frac{50}{138} + 40\cdot\frac{40}{138} + 48\cdot\frac{48}{138}$$

$E[X] = \ldots \qquad E[Y] = \ldots$