16ο Μάθημα Πιθανοτήτων 12/4/2010

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

1) Υπενθύμιση

X διακριτή $\Leftrightarrow P(X \in \{x_0, x_1, \dots\}) = 1$

$p(x) = P(X = x) \leftarrow$ συν/ση πιθ.

$F(x) = P(X \leq x) \leftarrow$ συν/ση καταν.

$E[X] = \sum_x x\, p(x) = \mu \qquad Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \sigma^2$

$\sigma = SD = \sqrt{Var[X]} \leftarrow$ τυπική απόκλιση (standard deviation)

$E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p(x)$

Γενικά: $E[g(X)] \neq g(E[X])$

Αλλά: $E[aX + b] = aE[X] + b$

$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

$SD[aX + b] = |a| SD[X]$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \geq 0.$

Ειδικές Διακριτές Κατανομές

(2) Ομοιόμορφη Διακριτή Κατανομή στο $\{1, 2, \dots, N\}$

Τυχαίο Πείραμα Τύχης: Τυχ. επιλ. αριθμού στο $\{1, \dots, N\}$

$p(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}$, $x = 1, 2, \dots, N$

$E[X] = \frac{N+1}{2}$, $Var[X] = \frac{N^2-1}{12}$

(3) Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

Τυχαίο Πείραμα: Ακολ. ανεξ. δοκιμών με πιθ. επιτυχ. $\to p$

πιθ. αποτυχ. $\to 1-p$

$X_1, X_2, X_3, \dots$ με X_i ανεξάρτητες

$P(X_i = 1) = p$ $\quad$ $P(X_i = 0) = 1-p$

Ενδιαφέρουσες τ.μ.

X = # επιτ. στην 1η δοκιμή ($= X_1$) ← Bernoulli(p)

Y = # επιτ. στις n πρώτες δοκιμές ($= \sum_{i=1}^{n} X_i$) ← Διωνυμική Bin(n,p)

W = # δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία ← Γεωμετρική Geom(p)

Z = # δοκιμών μέχρι την n-οστή επιτυχία ← Αρνητική Διωνυμική Neg Bin(n,p)

Π.χ.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

$X = 0$

$n = 5 \to Y = 1$, $n = 10 \to Y = 4$

$W = 4$

$n = 2 \to Z = 7$, $n = 4 \to Z = 10$

(4) Bernoulli (p)

$X \in \{0, 1\}$

$$P(X=x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases} = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

$E[X] = \sum x\, p(x) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$

$E[X^2] = \sum_x x^2 p(x) = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$

⑤ Διωνυμική Bin(n,p)

$Y \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$n = 4$

$\binom{4}{0}$ 0 0 0 0 $\longrightarrow P(Y=0) = p^0(1-p)^4$

1 0 0 0

$\binom{4}{1}$ 0 1 0 0 $\longrightarrow P(Y=1) = 4p^1(1-p)^3$

0 0 1 0

0 0 0 1

1 1 0 0

1 0 1 0

$\binom{4}{2}$ 1 0 0 1 $\longrightarrow P(Y=2) = 6p^2(1-p)^2$

0 1 1 0

0 1 0 1

0 0 1 1

1 1 1 0

$\binom{4}{3}$ 1 1 0 1 $\longrightarrow P(Y=3) = 4p^3(1-p)^1$

1 0 1 1

0 1 1 1

$\binom{4}{4}$ 1 1 1 1 $\longrightarrow P(Y=4) = p^4(1-p)^0$

Γενικά: $P(Y=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$

$(1+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i$, $E[Y] = \sum_x x p(x) = \sum_{x=0}^{n} x \underbrace{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{p(x)}$

1^{os} τρόπος

$$\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x \neq 0.$$

$$E[Y] = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n}{x}\binom{n-1}{\underset{y}{x-1}} p^x (1-p)^{n-x} = n\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y} p^{y+1}(1-p)^{n-y-1} =$$

$$= n \cdot p(1-p)^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{y} = n \cdot p(1-p)^{n-1}\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{n-1} = np$$

2^{os} τρόπος

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}t^x = (1+t)^n \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}t^{x-1} = n(1+t)^{n-1}$$

$$E[Y] = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = (1-p)^n\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x =$$

$$= (1-p)^n \cdot n\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{n-1}\frac{p}{1-p} = (1-p)^n n\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1}\frac{p}{1-p} = np$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$E[Y^2] = \sum_x x^2 p(x) = \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^{\cancel{2}}\frac{n}{\cancel{x}}\binom{n-1}{x-1}p^x(1-p)^{n-x} =$$

$$= n\sum_{x=1}^{n} x\binom{n-1}{\underset{y}{x-1}}p^x(1-p)^{n-x} = n\sum_{y=0}^{n-1}(y+1)\binom{n-1}{y}p^{y+1}(1-p)^{n-1-y} =$$

$$= n \cdot p\sum_{y=0}^{n-1}(y+1)\underbrace{\binom{n-1}{y}p^y(1-p)^{n-1-y}}_{\text{σω. πιθ. της } Bin(n-1,p)} = n \cdot p((n-1)p+1)$$

$$E[Y^2] = n(n-1)p^2 + np$$

$$Var[Y] = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p)$$

Τελικά:

$$p(x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

$$E[X] = np, \quad Var[X] = np(1-p)$$

Π.χ. 100 ρίψεις ζαριού

Y = # εμφαν. πολλ/σιων του 3

$E[Y] =$; $\quad Var[Y] =$;

Απάντ. $n=100$ δοκιμών Bernoulli με επιτυχ. = πολλ. του 3

με πιθ. επιτ. $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$E[Y] = np = \frac{100}{3} \qquad Var[Y] = np(1-p) = \frac{100}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{9}.$$