17ο Μάθημα Πιθανοτήτων — 14/4/2010

Ειδικές Διακριτές Κατανομές

① Ακολουθία ανεξ. δοκιμών Bernoulli

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ $\qquad P(X_i=1) = p$ (επιτυχία)

$\qquad\qquad\qquad\qquad P(X_i=0) = 1-p$ (αποτυχία)

X = # επιτ. σε 1 δοκιμή

Y = # επιτ. σε n δοκιμές

W = # δοκιμών μέχρι την 1^n επιτυχία

Z = # δοκιμών μέχρι την n-οστή επιτυχία

Συνοπτικά:

$X \sim \text{Bernoulli}(p) \qquad P(X=i) = p^i(1-p)^{1-i}, \quad i=0,1$

$Y \sim \text{Bin}(n,p) \qquad P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\ldots,n$

$E[X] = p \qquad Var[X] = p(1-p)$

$E[Y] = np \qquad Var[Y] = np(1-p)$

② Η Γεωμετρική Geom(p) κατανομή

$W \in \{1,2,3,\ldots\}$

$P(W=i) = p(X_1=0, X_2=0, \ldots, X_{i-1}=0, X_i=1) = p(1-p)^{i-1}, \quad i=1,2,\ldots$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(W=i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{1-p} = p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1} = p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^{j} =$$

$$= p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1$$

$$\left.\begin{array}{l} E[W] = \sum_{i=1}^{\infty} i\,P(W=i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot p(1-p)^{i-1} = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{d/dt} \sum_{i=1}^{\infty} i\,t^{i-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[W] = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \Leftrightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{p}}$$

$$Var[W] = E[W^2] - (E[W])^2$$

$$\left.\begin{array}{l} E[W^2] = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 P(W=i) = p\sum_{i=1}^{\infty} i^2(1-p)^{i-1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{d/dt} \sum_{i=1}^{\infty} i\,t^{i-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \xRightarrow{\cdot t} \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot t^i = \frac{t}{(1-t)^2} \xRightarrow{d/dt} \\ \sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot t^{i-1} = \frac{1\cdot(1-t^2)+t\cdot 2(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{(1-t)^4} = \frac{1-t^2}{(1-t)^4} = \\ = \frac{1+t}{(1-t)^3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[W^2] = p\cdot\frac{1+1-p}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

<u>Επομένως:</u> $Var[W] = E[W^2]-(E[W])^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{Var[W] = \frac{1-p}{p^2}}$$

<u>Συνοπτικά:</u> $W \sim Geom(p)$, $P(W=i) = p(1-p)^{i-1}$, $i=1,2,\dots$

$E[W] = \frac{1}{p}$ $\quad$ $Var[W] = \frac{1-p}{p^2}$

3) Η Αρνητική Διωνυμική Neg Bin(n,p)

$Z \in \{n, n+1, n+2, \dots\}$

$\{Z=i\} \Leftrightarrow \underbrace{00011001001\dots001}_{i} \leftarrow$ i-δοκιμή

Ακολουθία με n άσσους ("1") και $i-n$ μηδενικά ("0") με "1" στην τελευταία (i-οστή) θέση με πιθ. $p^n(1-p)^{i-n}$

Πόσες ακολουθίες αντιστοιχούν στην $\{Z=i\}$ = ;

π.χ. $i=5,\ n=3$ $\quad \{Z=i\} \longleftrightarrow$ 00111

11001

10101 $\quad \binom{4}{2} = 6$ ακολουθίες

01101

...

Άρα στο ερώτημα αντιστοιχούν $\binom{i-1}{n-1}$ ακολουθίες, αφού διαλέγω από τις $i-1$ θέσεις (εκτός της τελευταίας) που θα μπουν οι $n-1$ επιτυχίες.

$$P(Z=i) = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}, \quad i = n, n+1, n+2, \dots$$

$$E[Z] = n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i}{n} \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$\boxed{\binom{n}{i} = \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}} = np^n \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot (1-p)^{i-n} =$$

$$\binom{i}{n} = \frac{i!}{n!(i-n)!}$$

$$= \frac{np^n}{n!} \sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)(i-2)\dots(i-n+1)(1-p)^{i-n}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \overset{d^n/dt^n}{\Longrightarrow} \sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)(i-2)\dots(i-n+1)t^{i-n} = n!\frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{np^n}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(1-(1-p))^{n+1}} \Leftrightarrow \boxed{E[Z] = \frac{n}{p}}$$

Συνοπτικά: $Z \sim Neg\,Bin(n,p)$, $P(Z=i) = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}$, $i = n, n+1, \dots$

$$E[Z] = \frac{n}{p}, \quad Var[Z] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

4) Κατανομή Poisson (λ)

$X_1, X_2, \dots$ Ανεξ. Δοκιμών Bernoulli

Παρατηρώ n δοκιμές με πιθ. επιτ. p ώστε $n \to \infty$ με $np \to \lambda$, $p \to 0$

$Y_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n}) \longleftarrow$ Να μελετηθεί για $n \to \infty$

$$P(Y_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{(n-i)!\, n^i} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-i} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{n \cdot n \cdot n \dots n}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Η κατανομή με $p(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$, $i = 1, 2, \dots$ λέγεται <u>κατανομή Poisson με ρυθμό λ</u>

Κατανομή Poisson ακολουθούν πολλά φυσικά φαινόμενα:

1| # τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα

2| # τροχαίων ατυχημάτων ανά μήνα

3| # σεισμών σε μια γεωγραφική περιοχή.

$X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow E[X] = \lambda$ και $Var[X] = \lambda$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i\, p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \qquad j = i-1$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda}} \Leftrightarrow E[X] = \lambda$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{\underbrace{(i-1)}_{j=}!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^{j+1}}{j!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \cancel{j} \frac{\lambda^{j+1}}{\cancel{j}!(j-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

Άρα: $Var[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \Leftrightarrow Var[X] = \lambda$