9ο Μάθημα Πιθανοτήτων

19/4/2010

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

1) Έννοια

Συνεχείς τ.μ. $\xleftrightarrow{\text{Διαισθ.}}$ Συνεχές χαρακτηριστικό τυχ. πειρ.

$\updownarrow$ Μαθημ.

Χ (απόλυτα) συνεχής $\Leftrightarrow \exists\, f: \mathbb{R} \to [0, +\infty) : P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$

↳ συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας (σ.π.π.)

2) Ιδιότητες της σ.π.π.

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$

3) $P(X = x) = \int_x^x f(u)\,du = 0$

συνεχής

4) Η $f(x)$ <u>δεν</u> είναι άνω φραγμένη από το 1 γενικά.

5) Σχέση σ.κ. και σ.π.π.

$$F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (\text{όταν } F(x) \text{ παραγ.})$$

6) X συνεχής

$$P(x \le X \le x+dx) = \int_{x}^{x+dx} f(u)\,du \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ συνεχής}}}{\approx} f(x)dx \quad , \text{για } dx \to 0$$

③ Μέση Τιμή - Διασπορά - Τυπική Απόκλιση

X - συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$ κ' σ.κ. $F(x)$

$$E[X] \overset{\text{ορσ}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$SD[X] = \sqrt{Var[X]}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $E[aX+b] = aE[X] + b$
2) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$
3) $SD[aX+b] = |a|\, SD[X]$
4) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Ισχύουν για όλους τους τύπους των τ.μ.

5) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$ ← μόνο για συνεχείς τ.μ.

④ Εναλλακτικός Υπολογισμός Μέσης Τιμής μη αρνητ. τ.μ.

$X \ge 0$

X σ.κ. $F(x) \Rightarrow E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\,dx$

Απόδειξη

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \overset{X \ge 0}{=} \int_0^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{x} du \right) f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_u^{\infty} f(x)\,dx\,du = \int_0^{+\infty} \underbrace{P(X > u)}_{1 - F(u)}\,du$$

5) Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} c(4x-2x^2) & , 0<x<2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

i) $c = ;$

ii) $P(X>1) = ;$

iii) $E[X] = ;$

iv) $Var[X] = ;$

v) $F(x) = ;$

Λύση:

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^2 (4x-2x^2)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\left[\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c\left(\frac{4\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot 8}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{8}$

ii) $P(X>1) = P(X\in(1,+\infty)) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx =$

$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \ldots = \frac{1}{2}$

v) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ \int_0^x \frac{3}{8}(4u-2u^2)\,du & , 0\leq x\leq 2 \\ 1 & , x>2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0 & , x=0 \\ \frac{3}{8}\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right) & , 0\leq x\leq 2 \\ 1 & , x>2 \end{cases}$

iii) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 x\,\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^2$

iv) $E[X^2] = \int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx = \ldots$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \ldots$

⑥ Άσκηση

X χρόνος ζωής λαμπτήρων σε ώρες

συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\frac{x}{100}}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

i) P(ένας λαμπτήρας να ζήσει το πολύ 100 ώρες)

ii) Σε ένα πολύφωτο υπάρχουν 6 λαμπτήρες. Μετά από 100 ώρες λειτουργίας να βρεθούν: α) P(υπάρχουν ακριβώς 2 καμμένοι λαμπτήρες)

β) Μέσο πλήθος καμμ. λαμπτ.

Λύση

i) $P_{\text{απ.}} = P(X \le 100) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{100}}\,dx = \lambda\left[-100\, e^{-\frac{x}{100}}\right]_0^{100} =$

$= \lambda\left[-100 e^{-1} + 100\right] = 100\lambda(1-e^{-1})$

$\boxed{\lambda = ;}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\frac{x}{100}}\,dx = \lambda \cdot 100 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

ii) Πείραμα Τύχης: Εξέταση 6 λαμπτήρων μετά από 100 ώρες.

Μέσο πλήθος καμμένων λαμπτήρων

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$

$X_i = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } i \text{ λαμπτήρας λειτουργεί} \leftarrow \text{αποτυχία} \\ 1, & \text{αν ο } i \text{ —"— δεν λειτουργεί} \leftarrow \text{επιτυχία} \end{cases}$

$Y = \#$ καμμ. λαμπτ. $\sim Bin(6,\ 1-e^{-1})$

P(∃ουν 2 καμμ. λαμπτ. μετά από 100 ώρες) $= P(Y=2) = \binom{6}{2} \cdot (1-e^{-1})^2 (e^{-1})^4$

$\left(Bin(n,p) \quad P(Y=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ 0 \le i \le n.\right)$

Μέσο πλήθος καμμ. $= 6(1-e^{-1})$.

7) °Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} 2 , & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 , & \text{διαφορ.} \end{cases}$

είναι η $f(x)$ σωστή π.π. ;

Λύση:

Για να είναι σ.π.π. θα πρέπει i) $f(x) \geq 0 , \; x \in \mathbb{R}$ ✓

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{1/2} 2 \, dx = 1$ ✓

Επομένως η $f(x)$ είναι σ.π.π.

) °Άσκηση

X συνεχής με σκ $F_X(x)$ και σ.π.π. $f_X(x)$.

$Y = aX + b \Rightarrow$ i) $F_Y(y) = ;$

ii) $f_Y(y) = ;$

Λύση:

) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b) =$

$$= \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) , & a > 0 \\ P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) , & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) , & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) , & a < 0 \end{cases}$$

i) $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) , & a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) , & a < 0 \end{cases} = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

) °Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{διαφορ.} \end{cases}$

$Y = e^X$

i) $F_Y(y) = ;$ ii) $f_Y(y) = ;$ iii) $E[Y] = ;$