23ο Μάθημα Πιθανοτήτων

28/4/2010

Ανεξάρτητες τ.μ.
Κατανομές Αθροισμάτων τ.μ.

① Δεσμευμένες σ.π. – σ.π.π.

(X, Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

Ορίζουμε για κάθε y σταθ. με $P_Y(y) > 0$

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}, \quad \forall x$$

δεσμευμένη σ.π.
της X δεδομ. $Y = y$

Έχουμε: $P_{X|Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x$

$$\sum_x P_{X|Y}(x,y) = 1$$

X, Y ανεξ. αν $P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)$ ή $P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y)$, $\forall x, y$

αν $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$, $\forall x, y$

Γενικότερα X, Y ανεξ. $\Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

<u>Όμοια</u>: (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

Ορίζουμε για κάθε y σταθ. με $f_Y(y)>0$.

$$f_{X|Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \forall x$$

δεσμευμένη σ.π.π. της X δεδ. $Y=y$.

<u>Έχουμε</u>: $f_{X/Y}(x/y) \geq 0 \quad \forall x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X/Y}(x/y)\,dx = 1$$

X, Y ανεξ. $\Leftrightarrow f_{X/Y}(x|y) = f_X(x)$ ή $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$, $\forall x,y$

$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x,y.$

Γενικότερα: X, Y ανεξ. $\Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

② Δεσμευμένη σ.κ.

(X,Y) διακριτή ή συνεχής

$F_{X/Y}(x,y) = P(X\leq x \mid Y\leq y)$ σ.κ. της X δοθ. ότι $Y=y$

$$= \begin{cases} \sum_{u\leq x} P_{X/Y}(u/y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y}(u/y)\,du, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

③ Χαρακτηρισμός ανεξ.

X, Y ανεξ.

$\Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall x,y$

$\overset{\text{διακρ.}}{\Leftrightarrow} P_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y) \quad \forall x,y$

$\overset{\text{συν.}}{\Leftrightarrow} f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y) \quad \forall x,y$

④ °Άσκηση

(X,Y) διακρ.

$P\big((X,Y) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\big) = 1$

$P_{X,Y}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	$P_X(x)$
0	0,4	0,2	0,6
1	0,1	0,3	0,4
$P_Y(y)$	0,5	0,5	1,0

i) $P_X(x) =$;

ii) $P_Y(y) =$;

iii) $P_{X/Y}(x/y) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$

iv) X, Y ανεξ. ;

$y=0, \quad P_{X/Y}(x/0) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(0)} = \begin{cases} \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \ , & x=0 \\ \frac{0,1}{0,5} = 0,2 \ , & x=1 \end{cases}$

$y=1, \quad P_{X/Y}(x/1) = \dfrac{P_{X,Y}(x,1)}{P_Y(1)} = \begin{cases} \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \ , & x=0 \\ \frac{0,3}{0,5} = 0,6 \ , & x=1 \end{cases}$

iv) Δεν είναι ανεξ. γιατί για διαφορετικά y η $P_{X|Y}$ έχει διαφορετικές τιμές κάθε φορά. (Ξέρω κι άλλοι τρόποι απόδειξης).

⑤ °Άσκηση

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy \ , & 0<x<1, \ 0<y<1 \\ 0 \ , & \text{διαφορετικά} \end{cases} = cx\,1_{(0,1)}(x)\cdot 1_{(0,1)}(y)$

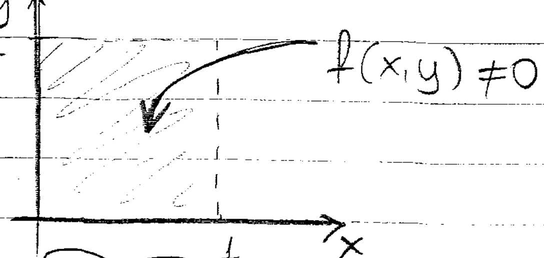
i) $f_X(x) =$;

ii) $f_Y(y) =$;

iii) $f_{X/Y}(x/y) =$;

iv) $f_{Y/X}(y/x) =$;

v) X, Y ανεξ.



X, Y ανεξαρτ. $\overset{\text{συνεχ.}}{\Longleftrightarrow}$ $f_{X,Y}(x,y) = \underset{\substack{\| \\ cx\,1_{(0,1)}(x)}}{g(x)}\ \underset{\substack{\| \\ y\cdot 1_{(0,1)}(y)}}{h(y)}$

Αμα η f δεν "ζει" σε ορθογώνιο δεν είναι οι X,Y ανεξάρτητες

$I_A(x) = \chi_A(x) = 1_A(x) = \begin{cases} 1 \ , & x\in A \\ 0 \ , & x \notin A \end{cases}$

δείκτρια συν/ση

$\boxed{c = ;}$ Πρέπει: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 cxy\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2}\int_0^1 x\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow c = 4.$$

i) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy = 4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2x \quad , 0<x<1$

Άρα: $f_X(x) = \begin{cases} 2x & , 0<x<1 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$ ή $f_X(x) = 2x\,1_{(0,1)}(x)$

ii) $f_Y(y) = 2y\,1_{(0,1)}(y)$.

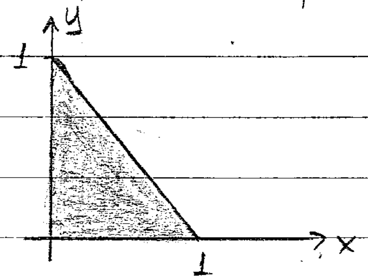
iii) $f_{X|Y}(x|y) = ;$

Για κάθε y με $f_Y(y)>0$ δηλ. $y\in(0,1)$ ορίζεται:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4x\cancel{y}\cancel{1_{(0,1)}(y)}\,1_{(0,1)}(x)}{2\cancel{y}\,\cancel{1_{(0,1)}(y)}} = 2x\,1_{(0,1)}(x)$$

6ο Άσκηση

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & , \begin{matrix}0<x<1\\0<y<1\\0<x+y<1\end{matrix} \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$



$f_{X,Y}(x,y) = cxy\,1_{(0,1)}(x)\,1_{(0,1)}(y)\,1_{(0,1)}(x+y)$

$c = ;$

i) $f_X(x)$ ii) $f_Y(y)$ iii) $f_{X|Y}(x|y)$ iv) $f_{Y|X}(y|x)$

v) X, Y ανεξ.

i) X,Y $\overset{\text{όχι}}{}$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$ για $x = y = \frac{2}{3}$

$f_{X,Y}(x,y) = 0 \neq f_X(x)\cdot f_Y(y) \neq 0$

για το $c \Rightarrow$ Πρέπει: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} cxy\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow c\int_0^1\int_0^{1-x} y\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow c = 24$$

i) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x \int_0^{1-x} y\,dy =$

$= 24x \dfrac{(1-x)^2}{2} = 12x(1-x)^2 \Leftrightarrow f_X(x) = 12x(1-x)^2 \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, για $0 < x < 1$

ii) $f_Y(y) = 12y(1-y)^2 \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$, για $0 < y < 1$

iii) Για κάθε $y \in (0,1)$ ορίζεται η $f_{X/Y}(x/y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{24x\cancel{y}}{12\cancel{y}(1-y)^2} = \dfrac{2x}{(1-y)^2}$ για $0 < x < 1-y$