i) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24x\int_0^{1-x} y\,dy =$

$= 24x\,\frac{(1-x)^2}{2} = 12x(1-x)^2 \Leftrightarrow f_X(x) = 12x(1-x)^2 1_{(0,1)}(x)$, για $0<x<1$

ii) $f_Y(y) = 12y(1-y)^2 1_{(0,1)}(y)$, για $0<y<1$

iii) Για κάθε $y\in(0,1)$ ορίζεται η $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{24x\cancel{y}}{12\cancel{y}(1-y)^2} = \frac{2x}{(1-y)^2}$ για $0<x<1-y$

24ο Μάθημα Πιθανοτήτων 30/4/2010

Δεσμευμένες Κατανομές
Ανεξάρτητες τ.μ.
Αθροίσματα τ.μ.

① Γενίκευση

$(X_1, X_2, \dots, X_n) \leftarrow$ n-διάστατη τ.μ.

$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_1\le x_1, X_2\le x_2, \dots, X_n\le x_n)$ με $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ — από κοινού σ.κ.

Ανάλογα ορίζονται περιθώριες σ.π., σ.π.π., δεσμευμένη κτλ.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. $\Leftrightarrow P(X_1\in A_1, X_2\in A_2, \dots, X_n\in A_n) =$

$P(X_1\in A_1)P(X_2\in A_2)\dots P(X_n\in A_n), \ \forall A_1, A_2, \dots, A_n$

② Αθροίσματα διακριτών τ.μ.

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$Z = X+Y \quad P_Z(z) = P(Z=z) = ;$

$P_Z(z) = P(Z=z) = P(X+Y=z) \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} \sum_x P(X=x)P(X+Y=z\mid X=x)$

$= \sum_x P(X=x, X+Y=z) = \sum_x P(X=x, Y=z-x) = \sum_x P_{X,Y}(x,z-x)$

③ Άθροισμα συνεχών τ.μ.

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, $Z = X+Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx$$

④ Παράδειγμα

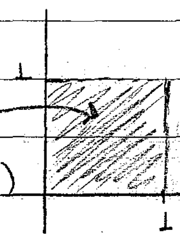
$X \sim Uniform([0,1])$ $\quad Y \sim Uniform([0,1])$ $\quad Z = X+Y$ (X,Y ανεξ.)

$f_Z(z) = ;$ σ.π.π.

Λύση:

Έχουμε: $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

Αφού οι X,Y ανεξ. $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0, & \end{cases}$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx \stackrel{\cdot}{=} \int_{max(0,z-1)}^{min(1,z)} 1\, dx = min(1,z) - max(0,z-1)$$

για $0 \le z \le 2$.

$0 \le x \le 1$

$0 \le z-x \le 1$

$\Updownarrow$

$0 \le x \le 1$

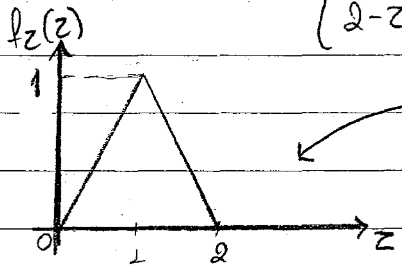
$z-1 \le x \le z$

$\Updownarrow$

$max(0,z-1) \le z \le min(1,z)$

Δηλαδή: $f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1 \\ 1-(z-1), & 1 \le z \le 2 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1 \\ 2-z, & 1 \le z \le 2 \end{cases}$$



Τριγωνική σ.π.π.

(5) Παράδειγμα

$X \sim Poisson(\lambda)$ $Y \sim Poisson(\mu)$ ανεξαρτ. οι X, Y.

i) $Z = X+Y$ κατανομή; δηλ. σ.π. $p_Z(z) = ;$

ii) $p_{X|Z}(x|z) = P(X=x \mid Z=z) = ;$

Λύση:

$Poisson(\lambda) \simeq Bin(\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{n}}, \frac{\lambda}{n})$

i) Έχουμε: $p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$ και $p_Y(y) = e^{-\mu}\frac{\mu^y}{y!}$, $y = 0, 1, 2, \dots$

X, Y ανεξ. $\Rightarrow p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_Z(z) = \sum_x p_{X,Y}(x, z-x) \overset{(*)}{=} \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} =$$

(*)
$\boxed{\begin{array}{l} x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z} \\ z-x \geq 0,\ z-x \in \mathbb{Z} \end{array}}$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{x=0}^{z}\frac{1}{x!(z-x)!}\lambda^x\mu^{z-x} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{z!}\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\lambda^x\mu^{z-x} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}, \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

Επομένως: $\left.\begin{array}{l} X \sim Poisson(\lambda) \\ Y \sim Poisson(\mu) \\ X, Y \text{ ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

ii) Για κάθε $z = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε μια δεσμευμένη σ.π. της X δοθ. ότι $Z = z$. Για $x \in \{0, 1, \dots, z\}$ έχουμε:

$$p_{X|Z}(x|z) = \frac{p_{X,Z}(x,z)}{p_Z(z)} = \frac{P(X=x, Z=z)}{p_Z(z)} \overset{(**)}{=} \frac{P(X=x, Y=z-x)}{p_Z(z)} \overset{X,Y}{\underset{\text{ανεξ}}{=}} \frac{p_X(x)\,p_Y(z-x)}{p_Z(z)} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\cancel{e^{-\mu}}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}, \quad x = 0, 1, \dots, z$$

(**) ΠΡΟΣΟΧΗ! Οι X, Z ΔΕΝ είναι ανεξ. για να χρήσιμω $p_{X,Z}(x,z) = p_X(z)\,p_Z(z)$

Επομένως: $\left.\begin{array}{l} X \sim Poisson(\lambda) \\ Y \sim Poisson(\mu) \\ X, Y \text{ ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow (X \mid X+Y=Z) \sim Bin\left(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

⑥ Αναγεννητικές ιδιότητες

X, Y ανεξ., ανήκουν στην ίδια οικογ. κατανομών.

Z = X+Y ανήκει στην οικογένεια;

X, Y ανεξ.

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ

i) $X \sim Bernoulli(p),\ Y \sim Bernoulli(p) \Rightarrow X+Y \sim Bin(2, p)$

ii) $X \sim Bin(n, p),\ Y \sim Bin(m, p) \Rightarrow X+Y \sim Bin(n+m, p)$

iii) $X \sim Geom(p),\ Y \sim Geom(p) \Rightarrow X+Y \sim NegBin(2, p)$

iv) $X \sim NegGeom(n, p),\ Y \sim NegGeom(m, p) \Rightarrow X+Y \sim NegBin(n+m, p)$.

v) $X \sim Poisson(\lambda),\ Y \sim Poisson(\mu) \Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

vi) Στην Υπεργεωμετρική δεν έχουμε αναγεννητική ιδιότητα

ΣΥΝΕΧΕΙΣ

vii) $X \sim Exp(\lambda),\ Y \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X+Y \sim Gamma(2, \lambda)$

viii) $X \sim Gamma(\alpha, \lambda),\ Y \sim Gamma(\beta, \lambda) \Rightarrow X+Y \sim Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$

ix) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

⑦ Παράδειγμα (αποδ. του viii του ⑥)

$X \sim Gamma(\alpha, \lambda) \quad Y \sim Gamma(\beta, \lambda) \quad X, Y$ ανεξ.

$Z = X+Y. \quad f_Z(z) = ;$

Απόδειξη:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-} e^{-\lambda x},\ x>0, \quad f_Y(y) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\lambda y},\ y>0$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx \underset{z-x>0}{\overset{x>0}{=}} \int_0^z \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}}_{C} e^{-\lambda x} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1}\,dx \overset{\frac{x}{z}=u}{=}$$

$$= C \cdot e^{-\lambda x} \int_0^1 (uz)^{\alpha-1}(z-uz)^{\beta-1} z\,du = C\, e^{-\lambda z} z^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du =$$

$$= C'' \cdot z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z},\ z>0. \Rightarrow C'' = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha,\beta)} \Rightarrow Z \sim Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$$