# 25ο Μάθημα Πιθανοτήτων 3/5/2010

## Μέση Τιμή - Διασπορά - Συνδιακύμανση

### 1) Υπενθύμιση

$$E[X] = \begin{cases} \sum_x x\,p(x), & X \text{ διακριτή με σ.π. } p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & X \text{ συνεχής με σ.π.π. } f(x) \end{cases}$$

$$Var[X] = E[(X-E[X])^2].$$

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)\,p(x), & X \text{ διακριτή με σ.π. } p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx, & X \text{ συνεχής με σ.π.π. } f(x) \end{cases}$$

$$E[aX+b] = a\,E[X] + b \qquad Var[aX+b] = a^2\,Var[X].$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 \qquad SD[X] = \sqrt{Var[X]}.$$

### 2) Επιπλέον Ιδιότητες (ισχύουν και για συνεχείς και για διακριτές)

1) $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$

2) $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$

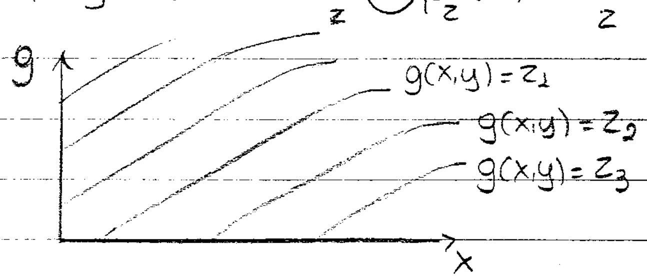
3) $$Z = g(X,Y) \Rightarrow E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)\,p(x,y), & (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y), & (X,Y) \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Απόδειξη:

$Z = g(X,Y)$ $\quad (X,Y)$ διακριτή

$$p_Z(z) = P(Z=z) = P(g(X,Y)=z) = \sum_{(x,y):g(x,y)=z} P(X=x, Y=y) = \sum_{(x,y):g(x,y)=z} p_{X,Y}(x,y)$$

$$E[g(X,Y)] = E[Z] = \sum_z \overset{g(x,y)}{\overset{\|}{z}}\, p_Z(z) = \sum_z \sum_{(x,y):g(x,y)=z} z\,p_{X,Y}(x,y) = \sum_x \sum_y g(x,y)\,p_{X,Y}(x,y)$$



4) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Απόδειξη:

$$E[X+Y] = \sum_x \sum_y (x+y)\, p_{X,Y}(x,y) = \sum_x \left( \sum_y x\, p_{X,Y}(x,y) \right) + \left( \sum_x \sum_y y\, p_{X,Y}(x,y) \right) =$$

$$= \sum_x x\, p_X(x) + \sum_y y\, p_Y(y) = E[X] + E[Y]$$

**ΓΕΝΙΚΑ:** $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ ( n πεπερασμένο, n αριθμός, όχι τ.μ. )

5) Γενικά $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, Αλλά μπορεί να ισχύει κάποιες φορές.

Π.χ. $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$ Ισχύει πάντα για X, Y ανεξ.

$P(Y=0) = \frac{1}{2}$ $P(Y=1) = \frac{1}{2}$

$P(XY=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(XY=1) = \frac{1}{6}$

$P(XY=-1) = \frac{1}{6}$

$E[X] = 0$ , $E[Y] = \frac{1}{2}$ $E[XY] = 0$

Εδώ ισχύει $E[XY] = E[X]E[Y]$

$X, Y$ ανεξ. $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$
$\not\Leftarrow$

Απόδειξη

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xy\, p_{X,Y}(x,y) = \sum_x \left( \sum_y x y\, p_X(x)\, p_Y(y) \right) = \left( \sum_x x\, p_X(x) \right) \cdot$$

$$\cdot \left( \sum_y y\, p_Y(y) \right) = E[X] \cdot E[Y]$$

**ΓΕΝΙΚΑ:** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. $\Rightarrow E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$

## ③ Παράδειγμα

$(X,Y)$ διακριτή με σ.π.

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/6 | 2/6 | 1/2 |
| 1 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| $p_Y(y)$ | 5/12 | 7/12 | 1 |

$$E[X] = \sum_x x\, p_X(x) = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y) = \frac{7}{12}$$

Παρατηρούμε: $E[XY] = \frac{1}{4}$, αλλά $E[X]E[Y] = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12} = \frac{7}{24} \neq \underbrace{\frac{1}{4}}_{E[XY]} =$

## ④ Άσκηση (Συλλογή κουπονιών)

Κάποιος αγοράζει προϊόντα. Κάθε προϊόν έχει 1 κουπόνι

Υπάρχουν $n$ διαφορετικοί τύποι κουπονιών

(όλα τα κουπόνια ισοπίθανα)

$X$ = # προϊόντων ώστε να μαζευτεί τουλ. 1 κουπόνι από κάθε είδος

$E[X] = ;$

**Λύση:**

i) $X \geq 0$

ii) $P(X=n) = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$

iii) $X = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$, όπου $X_i$ = # προϊόντων μέχρι να βρεθεί το επόμενο κουπόνι όταν έχουν βρεθεί ήδη $i$ κουπόνια.

$X_0 = 1$

$X_1 \sim Geom\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$X_2 \sim Geom\left(\frac{n-2}{n}\right)$

$\vdots$

$X_n \sim Geom\left(\frac{1}{n}\right)$

Γενικά $X_i \sim Geom\left(\frac{n-i}{n}\right)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$

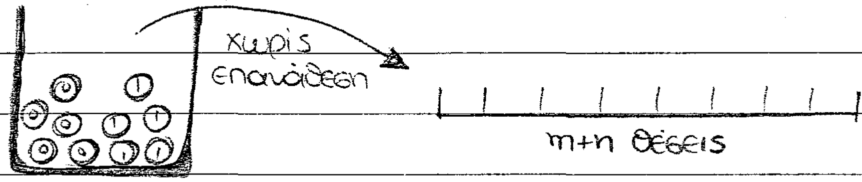
$$E[X] = E[X_0 + X + \dots + X_{n-1}] = E[X_0] + E[X_1] + \dots + E[X_{n-1}]$$

$$= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{n-(n-1)} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right) \simeq n \cdot \ln n$$

## 5) Άσκηση (Μέσο πλήθος ροών (r s))

n "1"

m "0"




συνεχόμενα "1" → ροή "1"

"0" → ροή "0"

Π.χ. 1110100110001

$n=7 \quad m=6$

4 ροές "1", 3 ροές "0"

$R = \#$ ροών

$R(1) = \#$ ροών "1" $\qquad R(0) = \#$ ροών "0"

$R = R(0) + R(1) \qquad E[R] = ; \qquad \Rightarrow E[R] = E[R(0)] + E[R(1)]$

Έχουμε: $R(1) = \sum_{i=1}^{m+n} I_i$ με $I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i\text{-θέση αρχίζει ροή από "1"} \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

και $E[R(1)] = E\left[\sum_{i=1}^{n+m} I_i\right] = \sum_{i=1}^{n+m} E[I_i]$

$E[I_i] = P(I_i = 1) = P(\text{στην } i\text{-θέση αρχίζει ροή με "1"})$

$E[I_1] = P(I_1 = 1) = \frac{n}{n+m}$

$i \geq 2$ : $E[I_i] = P(I_i = 1) = P(\text{στη θέση } i-1 \to \text{"0" και στην } i \to \text{"1"})$

$= \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1}$

$E[R(1)] = \sum_{i=1}^{n+m} E[I_i] = \frac{n}{n+m} + \cancel{(n+m-1)} \frac{m \cdot n}{(n+m)\cancel{(n+m-1)}} = \frac{n}{n+m} + \frac{m \cdot n}{n+m}$

Όμοια: $E[R(0)] = \frac{m}{n+m} + \frac{mn}{n+m}$

Π.χ. Αν έχουμε 1.000 "1" και 1.000 "0" να βάλω στη σειρά τυχαία

$E[R] = 1 + \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1000}{1.000 + 1.000} = 1001$