29ο Μάθημα Πιθανοτήτων 17/5/2010

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

① Ορισμός

(X,Y) διακριτή με σ.π. $p_{X,Y}(x,y)$

$$p_{X/Y}(x/y) = P(X=x/Y=y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$ δεσμευμένη σ.π. της X, δεδ. $Y=y$.

$p_{X/Y}(x/y) \geq 0$ και $\sum_x p_{X/Y}(x/y) = 1$.

Ορίζω: $E[X/Y=y] = m_{X/Y}(y) = \sum_x x\, p_{X/Y}(x/y)$

Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθ. ότι $Y=y$.

= Αριθμός που εξαρτάται από το y.

Ομοίως για (X,Y) συνεχή με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E[X/Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X/Y}(x/y)\,dx.$$

② Ιδιότητες

Ισχύουν τα πάντα που αφορούν την $E[X]$.

π.χ.

$$E[g(X)/Y=y] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, p_{X/Y}(x/y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_{X/Y}(x/y)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i / Y=y\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i/Y=y]$$

Προσοχή: $E[X/Y_1+Y_2=y] \neq E[X/Y_1=y] + E[X/Y_2=y]$.

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2 / Y=y) = P(X_1=x_1/Y=y)\,P(X_2=x_2/Y=y)$$

$$\Downarrow$$

$$E[X_1X_2/Y=y] = E[X_1/Y=y]\cdot E[X_2/Y=y]$$

③ Παράδειγμα

$X \cdot Y$ ανεξ. $\sim Bin(n,p)$

$E[X \mid X+Y=m] = ;$

$$p_{X/X+Y}(x \mid m) = \frac{p_{X,X+Y}(x,m)}{p_{X+Y}(m)} = \frac{P(X=x, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} = \frac{P(X=x, Y=m-x)}{P(X+Y=m)} =$$

$$= \frac{P(X=x)\,P(Y=m-x)}{P(X+Y=m)} = \frac{\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\binom{n}{m-x}p^{m-x}(1-p)^{n-m+x}}{\binom{2n}{m}p^{m}(1-p)^{2n-m}}$$

για $0 \le x \le m$

$$\Rightarrow p_{X/X+Y}(x/m) = \frac{\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}}, \quad 0 \le x \le m$$

$$E[X \mid X+Y=m] = \sum_{x=0}^{m} x\,\frac{\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} = \sum_{x=1}^{m} \frac{\cancel{x}\,\frac{n}{\cancel{x}}\binom{n-1}{x-1}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} \underset{=}{\overset{y=x-1}{=}}$$

$$= \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{y=0}^{m-1}\binom{m-1}{y}\binom{n}{m-1-y} = \frac{\cancel{n}\cancel{\binom{2n-1}{m-1}}}{\frac{2\cancel{n}}{m}\cancel{\binom{2n-1}{m-1}}} = \frac{m}{2}$$

④ Παράδειγμα

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}$, $\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}$

$E[X \mid Y=y] = ;$

$x>0$

$$E[X/Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X/Y}(x/y)\,dx \quad \text{και} \quad f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}\,dx = e^{-y}.$$

$$\Rightarrow f_{X/Y}(x/y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}} \Rightarrow (X/Y=y) \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{y}\right)$$

Άρα: $E[X/Y=y] = y.$

(5) Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς τ.μ.

$$m_{X/Y}(y) = E[X/Y=y] = \begin{cases} \sum_x x p_{X/Y}(x/y) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)dx & , X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Αριθμός που εξαρτάται από το y.
"Καλύτερη εκτίμηση της X αν ξέρω ότι Y=y"

Ορισμός:
$E[X/Y] = m_{X/Y}(Y)$ Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος της Y.

Τυχαία μεταβλητή
"Καλύτερη συν/ση της τ.μ. Y που προσεγγίζει τη X".

Στα παραδείγματα (3),(4)
$E[X/Z] = \frac{Z}{2}$ $(Z=X+Y)$ $E[X/Y]=Y$.

(6) Θεώρημα διπλής μέσης τιμής

$$E[X] = E[E(X/Y)] = \begin{cases} \sum_y p(Y=y)E[X/Y=y] & , Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)E[X/Y=y]dy & , Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

π.χ. σε πληθυσμό
X = ύψος
Y = βάρος
$X = \{1{,}60,\ 1{,}70,\ 1{,}80\}$
30% 50% 20%
Y 60 70 80

$\rightsquigarrow E[Y] = \frac{30}{100}\cdot 60 + \frac{50}{100}\cdot 70 + \frac{20}{100}\cdot 80$.

7) Παράδειγμα

Τυχαίο Πείραμα

- Ρίψη ζαριού
- Ρίψη νομίσματος (Δίκαιο) όσες φορές δείξει το ζάρι

$X = \# K \qquad E[X] = ;$

Λύση:

Y = ένδειξη του ζαριού

$$E[X] = \sum_{y} P(Y=y)\, E[X / Y=y]$$

$$P(Y=y) = \frac{1}{6}, \quad y = 1, 2, \ldots, 6$$

$$(X \mid Y=y) \sim Bin\left(y, \frac{1}{2}\right)$$

$$E[X / Y=y] = \frac{y}{2}$$

Άρα: $$E[X] = \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{6} \frac{y}{2} = \frac{1}{12} \sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{12} \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

8) Παράδειγμα

Φυλακισμένος

3 πόρτες:
- $\xrightarrow{\Pi 1}$ Ελευθερία άμεσα
- $\xrightarrow{\Pi 2}$ Πίσω στο κελί σε 1 μέρα
- $\xrightarrow{\Pi 3}$ » 4 μέρες

$X = \#$ ημερών ως την ελευθερία

(όταν είναι στο κελί διαλέγει πόρτα στα τυφλά).

$E[X] = ;$

Λύση:

$$P(X=0) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

Y = αρχική επιλογή πόρτας

$E[X] = P(Y=1)E[X/Y=1] + P(Y=2)E[X/Y=2] + P(Y=3)E[X/Y=3] =$

$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}(1+E[X]) + \frac{1}{3}(4+E[X]) \Rightarrow$

$\Rightarrow E[X] = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}E[X] \Rightarrow \underline{E[X] = 5}$

(9) Μέση Τιμή - Διασπορά Γεωμετρικής Κατανομής

X = # δοκ. Bernoulli μέχρι την πρώτη επιτυχία με πιθ. επιτ. p.

$P(X=x) = (1-p)^{x-1}p \quad , x = 1, 2, \ldots$

$E[X] = ;\quad , \quad Var[X] = ;$

Λύση:

$Y = \text{αποτελ. } 1^{ης} \text{ δοκιμής} = \begin{cases} 1 & , \text{με πιθ. } p \\ 0 & , \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$

$E[X] = \underbrace{P(Y=1)}_{p}\underbrace{E[X/Y=1]}_{1} + \underbrace{P(Y=0)}_{1-p}\underbrace{E[X/Y=0]}_{1+E[X]} \Rightarrow E[X] = p + (1-p)(1+E[X])$

$\Rightarrow pE[X] = 1 \Rightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{p}}$

$E[X^2] = \underbrace{P(Y=1)}_{p}\underbrace{E[X^2/Y=1]}_{1} + \underbrace{P(Y=0)}_{1-p}\underbrace{E[X^2/Y=0]}_{E[(1+X)^2]} \Rightarrow \ldots$

$E[X^2] = p\cdot 1 + (1-p)E[1+2X+X^2] \Rightarrow$

$E[X^2] = p + (1-p) + 2(1-p)E[X] + (1-p)E[X^2] \Rightarrow$

$pE[X^2] = 1 + 2(1-p)\cdot\frac{1}{p} \Rightarrow$

$E[X^2] = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}$

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$