34^{o} Μάθημα Πιθανοτήτων

2/6/2010

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Θέμα 3° / Ιανουάριος 2010

σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} c(3-x) &, 0<x<3 \\ 0 &, \text{διαφορ.} \end{cases}$$

i) $c = ;$

ii) $F_X(x) = ;$

iii) $E[X] = ;$ $Var[X] = ;$

iv) $Y = \log X$, $f_Y(y)$ σ.π.π.

Λύση:

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 c(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c\left(9 - \frac{9}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{9}$

ii) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \begin{cases} 0 &, x \le 0 \\ \int_0^x \frac{2}{9}(3-u)\,du &, 0<x<3 \\ 1 &, x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 &, x \le 0 \\ \frac{2}{9}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right) &, 0<x<3 \\ 1 &, x \ge 3 \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{0} + \int_0^3 + \int_3^x$

iii) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^3 x f(x)\,dx = \int_0^3 x \frac{2}{3}(3-x)\,dx = \ldots$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[X^2] = \int_0^3 x^2 \frac{2}{3}(3-x)\,dx$

iv) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\log X \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y)$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(e^y) \cdot e^y = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-e^y)e^y &, 0<e^y<3 \\ 0 &, \text{διαφ.} \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{9}(3-e^{y})e^{y} & , y < \log 3 \\ 0 & , y \geq \log 3 \end{cases}$$

② Θέμα 4 / Ιανουάριος 2010

Σύστημα με n_1 εξαρτήματα τύπου A

" " n_2 " " B που λειτουρ. ανεξ.

Πιθανότητα λειτουργ. εξαρτημ. τύπου $A \to p_1$

$B \to p_2$

Σύστημα λειτουργεί $\Leftrightarrow$ τουλαχ. $2A + 4B$

$n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 4$.

P(λειτουργ. συστημ.) = P(λειτ. τουλ. 2A και τουλ. 4 B) =

= P(λειτ. τουλ. 2 εξ. A) P(λειτ. τουλ. 4 εξ. B)

$$= \left(\sum_{k=2}^{n_1} \binom{n_1}{k} p_1^{k} (1-p_1)^{n_1-k}\right)\left(\sum_{k=4}^{n_2}\binom{n_2}{k} p_2^{k}(1-p_2)^{n_2-k}\right)$$

③ Θέμα 5 / Ιανουάριος 2010

Ακολ. ανεξ. δοκιμών Bernoulli με πιθ. επιτυχίας p_1

$N = \#$ δοκιμών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία

Στη συνέχεια N δοκιμές Bernoulli με πιθ. επιτ. p_2

$X = \#$ επιτυχιών.

$P(X=1) =$;

Επιπλέον να βρούμε: i) $P(N=n)$ ii) $P(N=n, X=x)$ iii) $P(X=x)$ iv) $P(N=n / X=x)$ v) $E[X/N=n]$ vi) $E[X]$.

Λύση:

i) $P(N=n) = p_1(1-p_1)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

ii) $P(N=n / X=x) = P(N=n)P(X=x/N=n) = p_1(1-p_1)^{n-1} \cdot \binom{n}{x} p_2^{x}(1-p_2)^{n-x}$

για $n = 1, 2, \ldots$ και $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

iii) $$P(X=x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)P(X=x/N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{n-1}\binom{n}{x}p_2^{x}(1-p_2)^{n-x} =$$

$$= \frac{p_1}{1-p_1}\left(\frac{p_2}{1-p_2}\right)^{x} \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{x}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{n}$$

Για να λύσω το άθροισμα παραγωγίζω x φορές το $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \Rightarrow$

$$\xRightarrow{d^x/dt^x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!} t^{n-x} = \frac{x!}{(1-t)^{x+1}\, x!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} t^{n-x} = \frac{\cancel{x!}}{(1-t)^{x+1}\cancel{x!}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} t^n = \frac{t^x}{(1-t)^{x+1}}$$

iv) $P(N=n / X=x) = \frac{P(N=n, X=x)}{P(X=x)} = \frac{P(N=n)P(X=x/N=n)}{P(X=x)}$

v) $E[X/N=n] = np_2 \left(= \sum_{x=0}^{n} x P(X=x/N=n) = \dots \right)$

vi) $E[X] \underset{\text{Μ. Τιμής}}{\overset{\text{Θ. Διπλής}}{=\!=}} \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) E[X/N=n] = \sum_{n=1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{n-1} n p_2 =$

$$= p_1 p_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p_1)^{n-1} \; (*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \xrightarrow{d/dt} \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Άρα: $(*) \Rightarrow p_1 p_2 \frac{1}{(1-(1-p_1))^2} = \frac{p_1 p_2}{p_1^2} = \frac{p_2}{p_1}$

4) Άσκηση

Πείραμα τύχης: <u>1ο Στάδιο</u>: Επιλ. τυχαίο αριθμού από σάλπη με 10 νούμερα 1, 2, ..., 10

X = αριθμός που επιλέχθηκε

<u>2ο Στάδιο</u>: Βάζω το X σε μια σάλπη με 10 νούμερα 1, 2, ..., 10

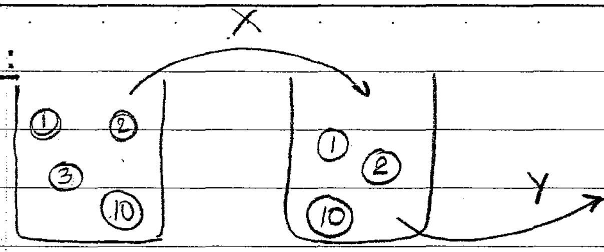
Επιλέγω ξανά!

Y = αριθμός που επιλέχθηκε.

i) $P(X=x)$ iii) $P(Y=y)$ v) $E[Y/X=x]$

ii) $P(X=x, Y=y)$ iv) $P(X=x/Y=y)$ vi) $E[Y]$

Λύση:



i) $P(X=x) = \frac{1}{10}$, $x = 1, \ldots, 10$

ii) $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y/X=x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{11} & , y = x, \ x=1,2,..,10 \\ \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11} & , y \neq x, \ y=1,2,..,10 \end{cases}$

iii) $P(Y=y) = \sum_{x=1}^{10} P(X=x)P(Y=y/X=x) = 9\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{11} = \frac{1}{10}$.

iv) $P(X=x/Y=y) = \frac{P(X=x)P(Y=y/X=x)}{P(Y=y)} = \begin{cases} \frac{2}{11} & , \text{αν } x=y \\ \frac{1}{11} & , \text{αν } x\neq y \end{cases}$

v) $E[Y/X=x] = \sum_{y=1}^{10} y P(Y=y/X=x) = x\cdot\frac{2}{11} + \sum_{\substack{y=1 \\ y\neq x}}^{10} y\frac{1}{11} = x\cdot\frac{2}{11} +$

$+\frac{1}{11}\left(\sum_{y=1}^{10} y - x\right) = \frac{2x}{11} + \frac{1}{11}\left(\frac{10\cdot 11}{2} - x\right) = \frac{x}{11} + 5.$

vi) $E[Y] = \sum_{x=1}^{10} P(X=x)E[Y/X=x] = \sum_{x=1}^{10} \frac{1}{10}\left(\frac{x}{11}+5\right) = \frac{1}{10\cdot 11}\cdot\frac{10\cdot 11}{2} + 5 = 5,5$

(5) Θέμα 6 / Ιανουάριος 2010

X, Y ανεξ. με $0 < Var(X), Var(Y) < \infty$

Ν.δ.ο. $\rho(X+Y, X-Y) = \frac{Var[X]-Var[Y]}{Var[X]+Var[Y]}$

Λύση:

$\rho(X+Y, X-Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y)}\sqrt{Var(X-Y)}} = \frac{Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y)}{}$

$= \frac{Cov(X,X) - \cancel{Cov(X,Y)} + \cancel{Cov(Y,X)} - Cov(Y,Y)}{\sqrt{Var(X)+Var(Y)}\ \sqrt{Var(X)+Var(Y)}} =$

$= \frac{Var[X]-Var[Y]}{Var[X]+Var[Y]}$