ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Δειγματικός χώρος (σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων) [συμβολίζουμε με δ.χ.].
Δειγματικό σημείο (απλό ενδεχόμενο)
Ενδεχόμενο (υποσύνολο του δ.χ.)
Πιθανότητα ενδεχομένου (Αριθμός $\in [0,1]$)
Τυχαία μεταβλητή (χαρακτηριστικό πειράματος τύχης)
Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται αν το αποτέλεσμα του πειράματος $\in A$.

Κλασική Πιθανότητα (ποσοστό) ενδεχομένου $= \dfrac{\text{Ευνοϊκές Περιπτώσεις}}{\text{Δυνατές Περιπτώσεις}} = \dfrac{\#\text{στοιχείων ενδεχομένου}}{\#\text{στοιχείων δ.χ.}}$

Οριακή Σχετική Πιθανότητα ενδεχομένου $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\#\text{φορών που συνέβει το ενδεχ. σε } n \text{ επαναλ.}}{n}$

Γεωμετρική Πιθανότητα ενδεχομένου $= \dfrac{\text{Εμβαδό ενδεχ.}}{\text{Εμβαδό δ.χ.}}$

Εμπειρική Πιθανότητα = Υποκειμενική Εκτίμηση.

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας (Kolmogorov): S δχ

$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε i) $0 \le P(E) \le 1$, $E \in \mathcal{A}$

ii) $P(S) = 1$

iii) $E_1, E_2, \ldots$ ακολουθία αμοιβαίως ασυμβίβαστων ενδεχ. και $E_i \cap E_j = \emptyset$ για $i \neq j \Rightarrow$ $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

$\mathcal{A}$: Οικογένεια υποσυνόλων του S (σύνολο ενδεχ.)

Βασικές Ιδιότητες $\Rightarrow$

i) $P(\emptyset) = 0$

ii) $P(E^c) = 1 - P(E)$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

iv) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) - \ldots$

$+ (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \ldots E_n)$

v) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ (η συνάρτηση πιθανοτ. είναι μονότονη)

vi) $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

vii) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ αύξουσα ακολουθ. ενδεχ. $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(E_n)$

$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ φθίνουσα ακολουθ. ενδεχ. $\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(E_n)$

Στοιχεία Συνδυαστικής

Πολλαπλασιαστική Αρχή: Πείραμα τύχης r σταδίων

$1^{\text{ο}}$ στάδιο : n_1 επιλογές
$2^{\text{ο}}$ στάδιο : n_2 »
⋮
$r^{\text{ο}}$ στάδιο : n_r »

Το πείραμα τύχης έχει συνολικά $n_1 n_2 \ldots n_r$ αποτελέσματα

Μετάθεση του $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ είναι κάθε τοποθέτηση των $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ σε σειρά.

$$\#\ \text{μεταθέσεων } m \text{ στοιχείων} = m!$$

Διάταξη $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ n ανά k λέγεται κάθε διατεταγμένη k-άδα στοιχείων του

απλή (χωρίς επανάληψη) — επαναληπτική (όταν έχω επανάθεση)

$$\#\ \text{διατάξεων } n \text{ ανά } k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\#\ \text{επαναληπτικών διατάξεων } n \text{ ανά } k = n^k$$

Συνδυασμός του $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ n ανά k είναι κάθε μη διατεταγμένη συλλογή k στοιχείων του.

απλός — επαναληπτικός

$$\#\ \text{συνδυασμών } n \text{ ανά } k \text{ χωρίς επανάληψη} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\#\ \text{συνδυασμών } n \text{ ανά } k \text{ με επανάληψη} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

! Οι επαναληπτικοί συνδυασμοί <u>δεν</u> εμφανίζονται γενικά σε προβλήματα πιθανοτήτων... (αντιπαράδειγμα: όμοια ζάρια).

! Για υπολογισμό πιθανοτήτων με τον κλασικό ορισμό **<u>ΠΡΕΠΕΙ</u>** τα ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα...

∇ Κάλπη με όμοια ή όχι αντικείμενα κ' Εξαγωγή αντικειμένων χωρίς επανάθεση → Μπορώ να χρησιμοποιώ συνδυασμούς

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού: $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(E_iE_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(E_iE_jE_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\ldots E_n)$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} P(E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_r})$$

Τα ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει $P(A_1)=P(A_j)=\ldots=P(A_k)$ και οι τομές τους ανά 2, 3, ... είναι ίσες λέγονται αυταλλάξιμα.

Πολυωνυμικοί Συντελεστές

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$

$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_r)!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$ = #διαιρέσεων ενός συνόλου n στοιχείων σε r διακεκρ. υποσύνολα με $n_1, n_2, \ldots, n_r$ στοιχεία το καθένα. = #μεταθέσεων n στοιχείων r ειδών με n_i στοιχ. από το είδος i

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Δεσμευμένη πιθαν. του E δεδομένου του F → $P(E|F) = \frac{P(EF) \leftarrow \text{τομή}}{P(F) \leftarrow \text{δέσμευση}}$ $(P(F)>0)$

Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$P(E_1E_2\ldots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\ldots P(E_n|E_1E_2\ldots E_{n-1})$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Δ.χ. $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβίβαστα ανά δύο ⇒

$P(E)=\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)\cdot P(E|F_i)$ (Απλοποιημένη Εκδοχή: $P(E)=P(F)\cdot P(E|F)+P(F^c)\cdot P(E|F^c)$)

Θεώρημα Bayes

Δ.χ. $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβίβαστα ανά δύο $\Rightarrow P(F_i|E) \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{P(F_iE)}{P(E)} = \frac{P(F_i)P(E|F_i)}{P(E)} = \frac{P(F_i)P(E|F_i)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(F_i)P(E|F_i)}$

↑ Πολ/κος Νόμος ↑ Θ/μα Ολικής Πιθανότητας

Λόγος Πιθανοφάνειας Ενδεχομένου (odds)

odds $= \frac{P(A)}{\ldots}$ = Πόσο είναι πιθανότερο να

Bayes σε μορφή Λόγου Πιθανοφάνειας $\Rightarrow \dfrac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \dfrac{P(H)P(E|H)}{P(H^c)P(E|H^c)}$

Τα ενδεχόμενα E, F ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(EF) = P(E)P(F)$.

Γενικά: τα $E_1, E_2, \dots$ είναι ανεξ. $\Leftrightarrow \forall \{i_1, \dots, i_r\}$ $P(E_{i_1}E_{i_2}\dots E_{i_r}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\dots P(E_{i_r})$

Αν έχω 2 ενδεχόμενα και είναι ανεξάρτητα τότε είναι και ανεξάρτητα ανά δύο

Για 3 ενδεχ. και πάνω: E, F, G Ανεξ. $\Leftrightarrow P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$

όχι πάντα

$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$

$$E, F, G \text{ Ανεξ. ανά } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} P(EF) = P(E)P(F) \\ P(EG) = P(E)P(G) \\ P(FG) = P(F)P(G) \end{cases}$$

Δοθέντων S δ.χ., F ενδεχ. $(F \subseteq S)$, P πιθαν. $\xrightarrow{\text{ΟΡΙΖΩ}} P_F(E) = P(E|F)$

Τότε η P_F είναι πιθαν., αφού:

i) $0 \le P_F(E) \le 1$

ii) $P_F(S) = 1$

iii) $P_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ για E_i αμοιβ.

Άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω όλα τα θεωρήματα με δέσμευση ως προς κάποιο ενδεχόμενο... π.χ. $P(E_1E_2\dots E_n|F) = P(E_1|F)P(E_2|E_1F)\dots P(E_n|E_1E_2\dots E_{n-1}F)$

$P(A\cup B|F) = P(A|F) + P(B|F) - P(AB|F)$

Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.)

Διαισθ. τ.μ. $\rightarrow$ Αριθμητικό χαρακτηριστικό του πειράματος

Μαθημ. τ.μ. $\rightarrow$ Συνάρτηση $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $\{s \in S : X(s) \in I\}$ να είναι ενδεχόμενο του S $\forall$ διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.

Συνάρτηση Κατανομής της τ.μ. X: $F_X(x) = P(X \le x)$, $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $F_X(x)$ αύξουσα

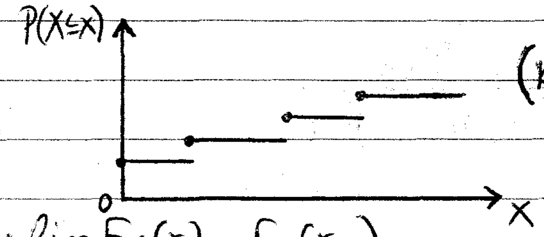
2) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

4) Η $F_X(x)$ είναι δεξιά συνεχής: $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

5) Για διακριτές τ.μ. είναι κλιμακωτή συνάρτηση

6) Για συνεχείς τ.μ. είναι συνεχής συνάρτηση



(κλιμακωτή)

7) $\lim_{x\to x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$

8) $P(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim_{x\to x_0^-} F_X(x)$

9) $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$, για $a \le b$.

<u>Επίσης</u>: $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X=a) = F_X(b) - F_X(a-)$

$P(a \le X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$

$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

<u>Διακριτές τ.μ.</u>

X διακριτή τ.μ. $\Leftrightarrow \exists \{x_0, x_1, \dots\} : P(X \in \{x_0, x_1, \dots\}) = 1$

Η συνάρτηση

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & , x = x_i \text{ για κάποιο } i \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = P(X = x)$$

λέγεται <u>συνάρτηση πιθανότητας</u> του X (σ.π.)

<u>Σχέση σ.κ. με σ.π.</u> $\Rightarrow p(x) = P(X=x)$

$F(x) = P(X \le x) \Rightarrow F(x) = \sum_{y \le x} p(y)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ $\Rightarrow$ 1) $p(x) \ge 0$

2) $\sum_x p(x) = 1$

<u>ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ X</u> μέτρο θέσης της τ.μ.

$E[X] = \sum_x x\,p(x)$, υπό την προϋπόθεση ότι $\sum_x |x| p(x) < \infty$

Η μέση τιμή ερμηνεύεται και ως κέντρο βάρους και ως μέσο κέρδος !!!

<u>Δείκτριες</u>

Τυχαίο Πείραμα με δ.χ. S, $A \subseteq S$ ενδεχόμενο $\Rightarrow$ Δείκτρια τ.μ. $\to I_A = \begin{cases} 0, & A \text{ δεν πραγματ.} \\ 1, & A \text{ πραγματοπ.} \end{cases}$

$E[I_A] = 0 \cdot P(I_A = 0) + 1 \cdot P(I_A = 1) = P(I_A = 1) = P(A)$.

<u>ΔΙΑΣΠΟΡΑ Τ.Μ. με σ.π. $p(x) = P(X=x)$ και $\mu = E[X]$.</u>

$Var[X] = E[(X-\mu)^2] \leftarrow$ Μέτρο μεταβλητότητας της τ.μ.

<u>Μέση Τιμή Συνάρτησης.</u>

X τ.μ. διακριτή με σ.π. $p(x)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow Y = g(X)$ τ.μ. διακριτή $\Rightarrow E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: <u>ΔΕΝ</u> ισχύει $E[g(X)] = g(E[X])$

<u>πχ</u>: $E[X^2] \neq (E[X])^2$.

Επίσης, ισχύουν τα εξής: αν $Y = aX + b$, X διακριτ., $a, b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $E[Y] = aE[X] + b$ (Γραμμικότητα της $E[X]$), $Var[Y] = a^2 Var[X]$

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της διασποράς είναι ο εξής τύπος:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

$\sigma = SD = \sqrt{Var[X]}$ και $SD[aX+b] = |a| SD[X]$

ΣΥΝΕΧΕΙΣ Τ.Μ.

X συνεχής τ.μ. $\Leftrightarrow \exists\, f: \mathbb{R} \to [0,+\infty): P(X \in B) = \int_B f(x)dx$

Η f ονομάζεται συν/ση πυκνότητας-πιθανότητας (σ.π.π.).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: 1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2) $\int_a^b f(x)dx = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$

3) $P(X=x) = \int_x^x f(u)du = 0$, X συνεχής

4) Η $f(x)$ δεν είναι φραγμένη από το 1 γενικά.

5) Σχέση σ.κ. και σ.π.π.

$F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

$f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ (όταν $F(x)$ παραγωγ.)

6) X συνεχής

$$P(x \le X \le x+dx) = \int_x^{x+dx} f(x)dx \overset{f \text{ συνεχής}}{=} f(x)dx, \text{ για } dx \to 0$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ - ΔΙΑΣΠΟΡΑ - ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

X- συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$ & σ.κ. $F(x)$

$E[X] \overset{\Phi}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ $\quad Var[X] = E[(X-E[X])^2]$.

$SD[X] = \sqrt{Var[X]}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ E[aX+b] = aE[X]+b \\ &2)\ Var[aX+b] = a^2 Var[X] \\ &3)\ SD[aX+b] = |a| SD[X] \\ &4)\ Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \\ &5)\ E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx \end{aligned}\right\} \text{Ισχύουν για όλες τις είδους τ.μ.}$$

∇ Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μέσης τιμής μη αρνητ. τ.μ. είναι ο εξής:

$$\left.\begin{aligned} &X \ge 0 \\ &X \text{ σ.κ. } F(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$$