Χρήσιμα Αθροίσματα:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα De Moivre - Laplace

De Moivre: $Bin(n, \frac{1}{2}) \sim N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$, n μεγάλο

Laplace: $Bin(n,p) \sim N(np, np(1-p))$

Θεώρημα: Αν $S_n \sim Bin(n p)$ τότε: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) =$

$= \Phi(b) - \Phi(a)$

Πολυδιάστατες τ.μ.

* Διδιάστατες τμ.

(X,Y) τμ. $\Rightarrow$ $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ από κοινού σ.κ. των X, Y.

$F_X(x) = P(X \le x) = \lim\limits_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.κ. της X.

$F_Y(y) = P(Y \le y) = \lim\limits_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σ.κ. της Y.

$P(a < X \le b, c < Y \le d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$

$\Rightarrow (X,Y)$ διακριτή $\Leftrightarrow \exists \{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots\}$ έτσι ώστε

$P(X,Y) \in \{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots\}$

$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ από κοινού σ.π.

$P_X(x) = P(X=x) = \sum\limits_y P_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σπ. της X

$P_Y(y) = P(Y=y) = \sum\limits_x P_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σπ. της Y.

$\Rightarrow (X,Y)$ συνεχής $\Leftrightarrow \exists f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ από κοινού σ.π.π. των X, Y.

ώστε $P((X,Y) \in C) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ περιθώρια σππ της X

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ — // — Y

$P((X,Y) \in [-\infty, x] \times (-\infty, y]) = P(X \le x, Y \le y) = F_{X,Y}(x,y) = \int^{y} \int^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$

Παραγωγίζοντας: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

⇒ Δεσμευμένες σ.π. - σ.π.π.

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$. Τότε $P_{X/Y}(x/y) = P(X=x / Y=y) =$
$= \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$, $\forall x$ και η $P_{X/Y}(x/y)$ λέγεται δεσμευμένη σ.π. της X δεδομ. $Y=y$.

Αν X,Y ανεξ. τότε $P_{X/Y}(x/y) = P_X(x)$ ή $P_{Y/X}(y/x) = P_Y(y)$ $\forall x,y$ (1)
τότε $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$ (2)

Ισχύουν και τα αντίστροφα των (1), (2) !

ΓΕΝΙΚΑ: X,Y ανεξ $\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$. Ισχύουν τα όμοια με την συνεχή.

⇒ Δεσμευμένη σ.κ.

(X,Y) διακριτή ή συνεχής $F_{X/Y}(x/y) = P(X \le x / Y \le y)$ σ.κ. της X δεδομένου ότι $Y=y$

$$F_{X/Y}(x/y) = \begin{cases} \sum_{u \le x} P_{X/Y}(u/y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y}(u/y)\,du, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

X,Y ανεξ. $\Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$
$\Leftrightarrow P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$
$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

* N-διάστατες τ.μ.

$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leftarrow$ n-διάστατη τ.μ.

$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$ από κοινού σ.κ.
με $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Ανάλογα ορίζονται οι περιθώριες σ.π, σ.π.π., δεσμευμένη, κτλ.

Αθροίσματα Τυχαίων Μεταβλητών.

⇒ (X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ και $Z = X+Y$

Τότε $P_Z(z) = \sum_x P_{X,Y}(x, z-x)$

⇒ (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$ και $Z = X+Y$.

Τότε: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx$.

Αναγεωπτικές Ιδιότητες

X, Y ανεξ., ανήκουν στην ίδια οικογένεια κατανομών.
$Z = X+Y$ ανήκει στην οικογένεια;

1) $X \sim Bernoulli(p)$, $Y \sim Bernoulli(p) \Rightarrow X+Y \sim Bin(2,p)$
2) $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p) \Rightarrow X+Y \sim Bin(n+m, p)$
3) $X \sim Geom(p)$, $Y \sim Geom(p) \Rightarrow X+Y \sim NegBin(2,p)$
4) $X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p) \Rightarrow X+Y \sim NegBin(n+m, p)$.
5) $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu) \Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$
6) Στην υπεργεωμετρική δεν έχουμε αναγεωπτική ιδιότητα!
7) $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X+Y \sim Gamma(2,\lambda)$
8) $X \sim Gamma(a,\lambda)$, $Y \sim Gamma(b,\lambda) \Rightarrow X+Y \sim Gamma(a+b, \lambda)$
9) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $E[X] = \begin{cases} \sum_x x p(x), & X \text{ διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx, & X \text{ συνεχής τ.μ.} \end{cases}$

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)p(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Επιπλέον έχουμε: (ισχύουν και για συνεχείς κ' για διακριτές τ.μ.)

1) $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$
2) $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$.
3) $Z = g(X,Y) \Rightarrow E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)p(x,y) & (X,Y) \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy & (X,Y) \text{ συνεχής} \end{cases}$
4) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
   ΓΕΝΙΚΑ: $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ (n πεπερασμένο, n αριθμός, όχι τ.μ.)
5) Γενικά $E[XY] \neq E[X]E[Y]$
   X, Y ανεξ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} E[XY] = E[X]E[Y]$

   ΓΕΝΙΚΑ: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. $\Rightarrow E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$.

Συνδιακύμανση (Covariance) (Μειονέκτημα: Εξαρτάται από μονάδες μέτρησης)
$Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$ ← Μετράει συσχέτιση των X, Y.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
2) $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
3) $Var[X] = 0 \Rightarrow X = \underset{E[X]}{\overset{\shortparallel}{c}}$ με πιθαν. 1
4) $Cov[X,Y] = 0 \overset{ορ}{\Leftrightarrow} X, Y$ ασυσχέτιστες
5) X, Y ανεξ. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X, Y ασυσχέτιστες
6) $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$
7) $Var[X] = Cov[X,X]$
8) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$
9) $Cov[aX+b, cY+d] = a \cdot c \cdot Cov[X,Y]$
10) $Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov[X,Y]$
11) $Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = Cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X] + 2\sum_{1 \le i < j \le n} Cov[X_i, X_j]$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, X_j] = Cov[X_1, X_1] + Cov[X_1, X_2] + Cov[X_2, X_2]$$

12) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ $\Rightarrow Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$

__Συντελεστής Συσχέτισης__ $(\rho(X,Y))$

X, Y τ.μ. με $E[X] = \mu_X$, $E[Y] = \mu_Y$, $Var[X] = \sigma_X^2$, $Var[Y] = \sigma_Y^2$ και
$Cov[X,Y] = \sigma_{X,Y}$

__Τότε:__ $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X] \cdot Var[Y]}} = \dfrac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$ (είναι ανεξ. των μον. μέτρησης)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $\rho(aX, bY) = \begin{cases} \rho(X,Y), & ab > 0 \\ -\rho(X,Y), & ab < 0 \end{cases}$
2) $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$
3) $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες
4) $\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \ a < 0$
5) $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \ a > 0.$

__ΠΡΟΣΟΧΗ__: Ο $\rho(X,Y)$ __δεν__ είναι γραμμικός τελεστής
Δηλ. $\rho(X+Y, Z) \neq \rho(X,Z) + \rho(Y,Z)$.

- **Δεσμευμένη Μέση Τιμή**

(X,Y) διακριτή με σ.π. $p_{X,Y}(x,y)$ και δεσμευμένη σ.π. της X δεδομ. $Y=y \Rightarrow p_{X/Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

$\underbrace{E[X|Y=y]}_{\text{δεσμευμένη μέση τιμή της } X \text{ δοθέντος ότι } Y=y} = m_{X/Y}(y) = \sum_x x\, p_{X/Y}(x|y)$ = αριθμός που εξαρτ. από το y

Ομοίως για (X,Y) συνεχή $\Rightarrow E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y}(x|y)\,dx$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: 1) Ισχύουν τα πάντα που αφορούν την $E[X]$.

2) $E[X|Y_1+Y_2=y] \neq E[X|Y_1=y]+E[X|Y_2=y]$

Αλλά: $P(X_1=x_1, X_2=x_2|Y=y) = P(X_1=x_1|Y=y)P(X_2=x_2|Y=y)$

$$\Downarrow$$

$$E[X_1X_2|Y=y] = E[X_1|Y=y]\cdot E[X_2|Y=y]$$

X, Y ανεξ.

Επίσης: $\underbrace{E[X/Y]}_{\text{δεσμευμένη μέση τιμή της } X \text{ δοθέντος της } Y} = m_{X/Y}(Y)$ = Τυχαία μεταβλητή

- **Θεώρημα Μέσης Τιμής**

$$E[X] = E[E[X/Y]] = \begin{cases} \sum_y p(Y=y)E[X/Y=y], & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)E[X/Y=y]\,dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: **ΔΕΝ** είναι σωστό ότι: $E[X_1+X_2+\ldots+X_N] = N\,E[X]$ και $Var[S_n] = N\,Var[X]$ ή $= E[N]\,Var[X]$

Ισχύει: $E[S_N] = E[N]E[X]$.

- **Πιθανογεννήτριες**

X ασύσια μη αρνητική τ.μ. με σ.π. $p_X(n) = P(X=n)$, $n=0,1,2,\ldots$

πιθανογεννήτρια της X: $P_X(z) = E[\underbrace{z^X}_{g(x)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{P(X=n)}}_{a_n} z^n$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: 1) $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$, $n=0,1,2,\ldots$

2) X, Y ισόνομες $\Leftrightarrow P_X(z) = P_Y(z)$

3) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ ανεξ. τ.μ.} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z)\ldots P_{X_n}(z)$

4) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ.+ισόν.} \\ N \text{ ανεξ. των } X_i \text{ ακερ. } \geq 0 \\ S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

5) $E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)] = P_X^{(n)}(1)$ $\left(E[X] = P_X'(1)\right)$

- Ροπογεννήτριες

X τ.μ. Ροπογεννήτρια της X: $M_X(t) \overset{\text{ορσ}}{=} E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X=x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx, & X \text{ συν.} \end{cases}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:
1) X, Y ισόνομες $\Leftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$
2) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξ.} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)$
3) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ.} \\ N \text{ στοχ. ανεξ. των } X_i \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow M_{S_n}(t) = P_N(M_X(t))$
4) $E[X^n] = M_X^{(n)}(0)$ (ροπή n-τάξης της X)
5) X διακριτή $M_X(t) = P_X(e^t)$

- Ανισότητα Markov (ισχύει για όλες τις τ.μ.)

$X \geq 0$ τ.μ. Τότε $P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha} \quad \forall \alpha > 0$

- Ανισότητα Chebyshev

X τ.μ. με $E[X]$ μ.τ., $Var[X] = \sigma^2$. Τότε: $P(|X-\mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$

- $Var[X] = 0 \Leftrightarrow X = E[X]$ με πιθανότητα 1

- Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών

Αν $X_1, X_2, \dots$ ανεξ + ισόνομες τμ με $E[X_i] = \mu$ τότε:

$\left.\begin{array}{l} \text{αν } S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ \bar{X}_n = \frac{S_n}{n} : \text{δειγματικός μέσος} \end{array}\right\} \Rightarrow P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$ καθώς $n \to \infty \quad \forall \varepsilon > 0$

- Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. + ισόνομ. τ.μ. με $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

$$\| $$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \leq x\right)$$, όπου $\Phi(x)$ σ.κ. της $N(0,1)$

Όταν $X_1, X_2, \dots$ διακριτές + ισόνομες και διακριτές για να εφαρμόσω το Κ.Ο.Θ. εφαρμόζω τη διόρθωση συνέχειας, δηλαδή

$P(a \leq S_n \leq b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$P\left(a - \frac{1}{2} \leq S_n \leq b + \frac{1}{2}\right) \longleftarrow$ Εφαρμόζω εδώ το Κ.Ο.Θ.