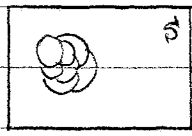
19.02.10 2° μάθημα

① Αξιωματική Θεμελίωση Πιθανοτήτων

Πείραμα Τύχης $(S, \mathcal{A}, P)$

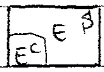
- S: σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων
- $\mathcal{A}$: σύνολο ενδεχομένων
- P: συνάρτηση πιθανότητας



1. $0 \le P(E) \le 1$, $E \in \mathcal{A}$
2. $P(S) = 1$
3. $A_1, A_2, \dots$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

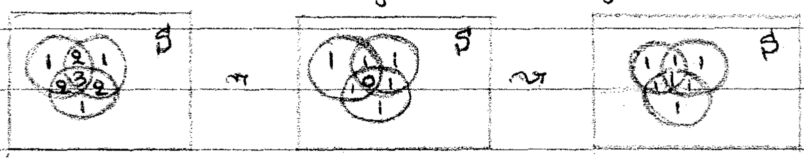
② Βασικοί Υπολογισμοί

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(E^c) = 1 - P(E)$



3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

4. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\dots E_n)$



5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
6. $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$
7. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων
   $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

   $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία ενδεχομένων
   $\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

③ Κλασική Πιθανότητα

S πεπερασμένος δ.χ.
$\{1,2,3,\dots,N\}$

$P(\{i\}) = \frac{1}{N}$

Γενικά $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Ευνοϊκές}}{\text{Δυνατές}}$

πλήθος στοιχείων του A

πλήθος στοιχείων του S

④ Παραδείγματα

1. Τρεις παίκτες που ρίχνουν από 1 ζάρι: A, B, Γ.
   P(η ρίψη του Γ να ισούται με το άθροισμα ρίψεων των A, B) = ;

Δειγματικός Χώρος $\{(\underset{A}{\alpha}, \underset{B}{\beta}, \underset{\Gamma}{\gamma}) : \alpha,\beta,\gamma \in \{1,2,3,\dots,6\}\}$

$|S| = 6^3 = 216$

$E = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in S : \gamma = \alpha + \beta\}$

$E = \{(1,1,2)\ (1,2,3)\ (2,1,3)\ (1,3,4)\ (2,2,4)\ (3,1,4)\ (1,4,5)\ (2,3,5)\ (3,2,5)\ (4,1,5)\ (1,5,6)\ (2,4,6)\ (3,3,6)\ (4,2,6)\ (5,1,6)\}$

$|E| = 15$

$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{15}{216}$

Γενίκευση με n-εδρο ζάρι: $|S| = n^3$

$|E| = 1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$

$1 \leftarrow (1,1,2)$

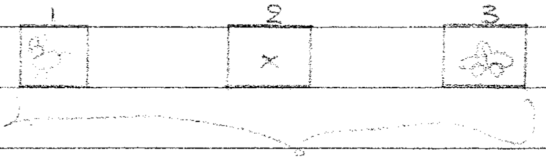
$2 \leftarrow (1,2,3)\ (2,1,3)$

$3 \leftarrow (1,3,4)\ (2,2,4)\ (3,1,4)$

$P(E) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^3} = \frac{n-1}{2n^2}$

$n-1 \leftarrow (1,n-1,n)$

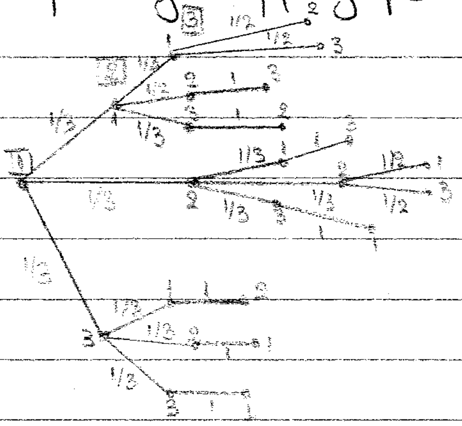
2. The Monty Hall dilemma



1 μεγάλο δώρο
2 αποτυχίες

3 πόρτες

Πείραμα τύχης
1. Επιλογή πόρτας που θα κρυφτεί το δώρο
2. Επιλογή πόρτας από τον παίκτη
3. Αποκάλυψη πόρτας με αποτυχία



• (1,1,2) $\frac{1}{18}$ ← πιθ. δειγμ. σημείου
• (1,1,3) $\frac{1}{18}$
* (1,2,3) $\frac{1}{9}$
* (1,3,2) $\frac{1}{9}$
* (2,1,3) $\frac{1}{9}$
• (2,2,1) $\frac{1}{18}$
• (2,2,3) $\frac{1}{18}$
* (2,3,1) $\frac{1}{9}$
* (3,1,2) $\frac{1}{9}$
* (3,2,1) $\frac{1}{9}$
• (3,3,1) $\frac{1}{18}$
• (3,3,2) $\frac{1}{18}$

P(κερδίζω αν μένω σταθερός στην αρχ. επιλ.) $= \frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18} = \frac{1}{3}$

• μένω σταθ. στην αρχ. επιλογή

P(κερδίζω αν αλλάξω επιλογή) $= \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$

* αλλάζω επιλογή

Μένω σταθερός $\frac{1}{3}$ (ό,τι και να γίνει μετά δε με πειράζει)
Αλλάζω (κερδίζω μόνο αν η αρχική μου επιλογή ήταν λάθος $(1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3})$)

⑤ Αποδείξεις Βασικών Υπολογισμών

1. $P(\emptyset)=0$

$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$
$\;\;\|\;\;\;\;\|\;\;\;\;\|\;\;\;\;\|$
$\;\;\Omega\;\;\;\emptyset\;\;\;\emptyset\;\;\;\emptyset$

Αξίωμα 3: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \underset{\text{αξίωμα 2}}{\Rightarrow} \underset{=1}{P(\Omega)} = \underset{=1}{P(\Omega)} + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) \underset{\text{αξίωμα 1}}{\Rightarrow} P(\emptyset)=0$

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$

$\;\,\| \quad\; \| \quad \| \quad \|$

$\;E \quad E^c \quad \emptyset \quad \emptyset$

Αξίωμα 3 : $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow$ αντίστοιχα