22.02.10 3° μάθημα

① Αποδείξεις Βασικών Αποτελεσμάτων

1. $P(\emptyset)=0$

$$\underset{S}{\overset{E_1}{\shortparallel}},\ \underset{\emptyset}{\overset{E_2}{\shortparallel}},\ \underset{\emptyset}{\overset{E_3}{\shortparallel}},\ \dots$$

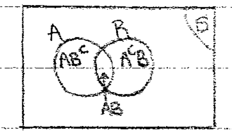
$$1 = P(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}_{S}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{P(S)}} + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset)=0$$

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

$$\underset{E}{\overset{E_1}{\shortparallel}},\ \underset{E^c}{\overset{E_2}{\shortparallel}},\ \underset{\emptyset}{\overset{E_3}{\shortparallel}},\ \dots \quad \text{ασυμβίβαστα}$$

$$1 = P(S) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(E) + P(E^c) + \sum_{i=3}^{\infty} P(\emptyset)^{\nearrow 0}$$

3. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



$$A\cup B = \underset{\text{ασυμβίβαστα}}{AB^c \cup AB \cup A^cB} \Rightarrow P(A\cup B) = P(AB^c) + P(AB) + P(A^cB) =$$

$$= \underbrace{P(AB^c) + P(AB)}_{P(A)} + \underbrace{P(A^cB) + P(AB)}_{=P(B)} - P(AB) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

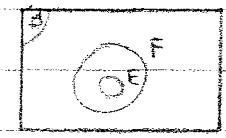
4. $$P(\bigcup_{i=1}^{m} E_i) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) - \dots + (-1)^{m+1} P(E_1E_2\dots E_m)$$

Επαγωγή χρησιμοποιώντας το 3 $(P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB))$

Για $m=3$: $$P(E_1\cup E_2\cup E_3) = P(E_1\cup E_2) + P(E_3) - P(\overbrace{(E_1\cup E_2)E_3}^{E_1E_3\cup E_2E_3}) =$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) + P(E_3) - P(E_1E_3) - P(E_2E_3) + P(E_1E_2E$$

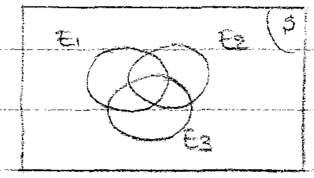
5. $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$



$F = E \cup FE^c \Rightarrow P(F) = P(E) + P(FE^c)$

$\underset{P(FE^c)\geq 0}{\Rightarrow} P(F) \geq P(E)$

6. $E_1, E_2, \ldots$ ακολουθία ενδεχομένων



$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \underbrace{E_1}_{F_1} \cup (\underbrace{E_2 E_1^c}_{F_2}) \cup (\underbrace{E_3 E_1 E_2^c}_{F_3}) \cup \ldots$

$F_1 = E_1$

$F_i = E_i E_1^c E_2^c \ldots E_{i-1}^c, \quad i \geq 2$

$\vdots$

$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

Πολύ σημαντικό

F_i ασυμβίβαστα

$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

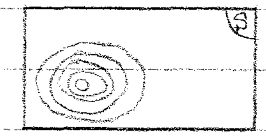
$F_i \subset E_i$

$F_{i+1} \subset E_i^c$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \underset{\text{ασυμβίβαστα}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i E_1^c E_2^c E_3^c \ldots E_{i-1}^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

7. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ Αύξουσα Ακολουθία Ενδεχομένων

$\Downarrow$



$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

Χρησιμοποιώ τα ίδια F_i με την ιδιότητα 6! όμως $F_1 = E_1$

$F_i = E_i E_{i-1}^c, \quad i \geq 2$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \underset{F_i \text{ ασυμβίβαστα}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) =$

$\underset{F_i \text{ ασυμβίβαστα}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}_{E_n}\right)$

Όμοια αν έχω $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία $\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

Αφού $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots \Rightarrow E_1^c \subseteq E_2^c \subseteq E_3^c \subseteq \dots$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$\Rightarrow P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(E_n))$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

② Παραδείγματα

1. Πείραμα τύχης: Ρίψη 2 ζαριών

Δειγματικός Χώρος

$$S = \{ \begin{matrix} (1,1), (1,2), (1,3) \dots & (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots & (2,6) \\ \vdots & \vdots \\ (6,1) \quad \dots & (6,6) \end{matrix} \}$$

$|S| = 36$

$P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ ← ισοπίθανα

$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$

A: το άθροισμα των ενδείξεων είναι 7 $\{(1,6),(2,5),\dots,(6,1)\}$ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B: η μεγαλύτερη ένδειξη είναι 4 ακριβώς $\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ $P(B) = \frac{7}{36}$

Γ: το 1ο ζάρι έφερε άρτια ζαριά $P(\Gamma) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Δ: η 1η ζαριά είναι μικρότερη της 2ης $P(\Delta) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36}$

E: διπλή ζαριά $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$, $P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Z: Εξάρες $\{(6,6)\}$, $P(Z) = \frac{1}{36}$

H: Ασόδυο $\{(1,2),(2,1)\}$, $P(H) = \frac{2}{36}$

Παραλλαγή π.χ. για $1 \dots n$ η μεγαλύτερη ένδειξη να είναι ακριβώς $k = 2k-1$ γιατί θα είναι τα στοιχεία

$(1,k),(2,k),(3,k),\dots(k-1,k)$ $\quad k-1$ στοιχεία

$(k,k-1),(k,k-2),\dots(k,1)$ $\quad k-1$ στοιχεία

(k,k) $\quad 1$ στοιχείο

$2k-1$ στοιχεία

③ Παραδείγματα

2. (chuck-a-luck) Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε 1 αριθμό μεταξύ 1-6. Ρίχνονται 3 ζάρια. Χάνει αν κανένα ζάρι δε δείχνει τον αριθμό που στοιχημάτισε.

$P(\text{κερδίζει ο παίκτης}) = P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(B\Gamma)-P(\Gamma A)+P(AB\Gamma)$

Έστω ότι στοιχημάτισε στο i (Αν δεν είχαμε ορίσει που στοιχημάτισε ο δ.χ θα ήταν διαφορετικός και το πρόβλημα πιο περίπλοκο)

Δειγματικός Χώρος $= \{(1,1,1),(1,1,2),\dots(6,6,6)\}$

Πείραμα Τύχης: Ρίψη 3 ζαριών

$|S| = 6^3 = 216$

$\{\text{κερδίζει ο παίκτης}\} = \{\text{έρχεται ζαριά } (k,l,m) \text{ που περιέχει το } i\} = \overset{A}{\{\text{το 1ο ζάρι φέρνει } i\}} \cup \overset{B}{\{\text{το 2ο ζάρι φέρνει } i\}} \cup \overset{\Gamma}{\{\text{το 3ο ζάρι φέρνει } i\}}$

$P(\text{κερδίζει ο παίκτης}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}-\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+\frac{1}{216} = \frac{1}{2}-\frac{17}{216} = \frac{91}{216}$

④ Άσκηση: Μια οικογένεια έχει 4 παιδιά. Τι είναι πιθανότερο σχετικά με το φύλο των παιδιών; 3-1 ή 2-2;