05.03.10 7ο μάθημα

① Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i) - \sum_{1\le i\le j\le m} P(E_i E_j) + \sum_{1\le i<j<k\le m} P(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{m+1} P(E_1 E_2 \dots E_m) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le m} P(E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_r})$$

② Άσκηση: Επιλογή αριθμού από το 1 ως το 1000

P($\underbrace{\text{ο αριθμός δεν διαιρείται με το 2 ούτε με το 3 ούτε με το 5}}_{A}$)

Λύση: A_1: ενδεχόμενο ο αριθμός διαιρείται με το 2

A_2: -||- -||- -||- 3

A_3: -||- -||- -||- 5

άρα $P(A) = P(A_1^c A_2^c A_3^c) = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3)$

$- P(A_1A_2A_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{333}{1000} - \frac{1}{5} + \frac{\lfloor \frac{1000}{6} \rfloor}{1000} + \frac{\lfloor \frac{1000}{10} \rfloor}{1000} + \frac{\lfloor \frac{1000}{15} \rfloor}{1000} - \frac{\lfloor \frac{1000}{30} \rfloor}{1000}$

$\lfloor \frac{1000}{2} \rfloor$ ακέραιο μέρος

γιατί $P(A_1) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

$P(A_2) = \frac{333}{1000}$ $\leftarrow \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor$

$P(A_3) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$ $\leftarrow \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor$

$P(A_1A_2) = \frac{\lfloor \frac{1000}{6} \rfloor}{1000}$

$P(A_2A_3) = \frac{\lfloor \frac{1000}{15} \rfloor}{1000}$

$P(A_3A_1) = \frac{\lfloor \frac{1000}{10} \rfloor}{1000} = \frac{1}{10}$

$P(A_1A_2A_3) = \frac{\lfloor \frac{1000}{30} \rfloor}{1000}$

μοιραία

③ Άσκηση: 20 άτομα $\rightsquigarrow$ 5 όροφος

Κάθε άτομο επιλέγει τυχαία όροφο

P(τουλ 1 άτομο να αποβιβαστεί στους ορόφους 1, 2, 3) = ;

λύση: Δειγμ. χώρος: $S = \{(i_1, i_2, \ldots, i_5) : i_j = 1,2,3,4,5\}$

↳ ο όροφος που κατεβαίνει ο j

$|S| = 5^{20}$ ← δυνατές

P(τουλ 1 άτομο στον 1°, 2°, 3°) $= P(A_1^c A_2^c A_3^c) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3)$

$+ P(A_1A_2) + P(A_2A_3) + P(A_1A_3) - P(A_1A_2A_3) =$

A_i: ενδεχόμενο δεν αποβιβάζονται άτομα στον i όροφο, $i = 1,2,3$

$= 1 - 3\left(\frac{4}{5}\right)^{20} + 3\left(\frac{3}{5}\right)^{20} - \left(\frac{2}{5}\right)^{20}$

γιατί $P(A_1) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{(i_1, \ldots, i_{20}) \text{ που δεν εμφ. το } 1}{5^{20}} = \frac{4^{20}}{5^{20}}$

$\overset{\shortparallel}{P}(A_2) = P(A_3)$ γιατί θέλω να μην εμφανίζεται 1 αριθμός για $i=1$ το 1, $i=2$ το 2, $i=3$ το 3

$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_3A_1) = \frac{3^{20}}{5^{20}}$ γιατί θέλω να μην εμφανίζονται 2 αριθμοί!

$P(A_1A_2A_3) = \frac{2^{20}}{5^{20}}$ γιατί θέλω να μην εμφανίζονται 3 αριθμοί

Αναλλοίωτα λέμε τα ενδεχόμενα στα οποία $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$ κλπ
$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_3A_1)$

δηλαδή όταν υπάρχει συμμετρία στο πρόβλημα.

④ Το πρόβλημα των ταυτίσεων (Matching Problem)

Έχω N άτομα – N καπέλα αντίστοιχα

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & N \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \kappa_1 & \kappa_2 & & \kappa_N \end{array}$$

Γίνεται τυχαία αντιστοίχιση ατόμων-καπέλων

P(κανένα άτομο δεν παίρνει το καπέλο του) = ;

Δειγμ. Χώρος $\{(i_1, i_2, \dots, i_N)$ μετάθεση των $\kappa_1, \dots, \kappa_N\} = S$

$|S| = N!$ όλοι οι δυνατοί τρόποι να μπουν τα καπέλα στη σειρά

P(κανένα άτομο δεν παίρνει το καπέλο του) $= P(E_1^c E_2^c \dots E_N^c) =$

$= P((E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N)^c) = 1 - (P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) = 1 - \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le N} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) =$

E_i = ενδεχόμενο το άτομο i να πάρει το καπέλο του

έχει $\binom{N}{r}$ όρους το άθροισμα

$= \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le N} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) =$ (γιατί η νέα τιμή είναι όλος ο δ.χ.)

$P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) = P($τα άτομα $i_1, i_2, \dots, i_r$ να πάρουν τα καπέλα τους$) =$

$= \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{(N-r)!}{N!}$ → μεταθέσεις καπέλων υπόλοιπων ατόμων

$$= \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \binom{N}{r} \frac{(N-r)!}{N!} = \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \frac{\cancel{N!}}{r!\,\cancel{(N-r)!}} \frac{\cancel{(N-r)!}}{\cancel{N!}} = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^r}{r!} \to e^{-1} \approx 0.37$$

καθώς $N \to \infty$

⑤ Άσκηση: Τοποθέτηση των 52 φύλλων μιας τράπουλας στη σειρά

P(το 1ο φύλλο μετά τον 1ο άσσο να είναι ο Άσσος μπαστούνι)

P(-"- -"- -"- το 2 -"-)

Ποια είναι μεγαλύτερη;

Είναι ίσες!!

4 άσσοι και 2 μπαστούνι

□ □ □ □ □

δε με βοηθάει!

Λύση: Πάω να υπολογίσω γενικά

P(το 1ο φύλλο μετά τον 1ο άσσο να είναι "τάδε") =

$= \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\text{όλες οι μεταθέσεις όπου το τάδε είναι μετά τον άσσο}}{\text{όλες οι μεταθ. των τραπουλ.}} = \frac{51!}{52!} = \frac{1}{52}$ γιατί όλες οι μεταθέσεις που το πάιδε είναι μετά τον 1ο άσσο : Μια ενέργεια διασπάται σε 2 στάδια :

1ο: Βάζω τα φύλλα εκτός του πάιδε στη σειρά → $51!$

2ο: Βάζω τον πάιδε μετά τον 1ο άσσο → 1

Από πολ. αρχή: $51!\cdot 1 = 51!$

⑥ Πολυωνυμικοί Συντελεστές

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!} = \frac{(n_1+n_2+\dots+n_r)!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!} \leftarrow \text{Πολυων. συντελ.}$$

↑ # διαιρέσεων ενός συνόλου n στοιχείων σε r διακεκρ. υποσυν. με $n_1, n_2 \dots n_r$ στοιχεία το καθένα

Μοιρασιά σε r στάδια: 1ο: επιλογή στοιχείων για 1ο σύνολο → $\binom{n}{n_1}$

2ο: -ıı- 2ο -ıı- → $\binom{n-n_1}{n_2}$

⋮

rο: -ıı- rο -ıı- → $\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

Από πολλαπλ. αρχή: $\#\,\text{διαιρ} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r} = \dfrac{(n_1+n_2+\dots+n_r)!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}$

↑ # μεταθέσεων n στοιχείων r ειδών με n_i στοιχεία από το είδος i

π.χ. $n = 10$, $r = 3$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$

$\underbrace{○○○○○}_{n_1=5}\ \underbrace{⊙⊙⊙}_{n_2=3}\ \underbrace{⊕⊕}_{n_3=2}$ ($r=3$)

○○○⊕⊙○⊙○⊕○○

○⊕○⊕○○○⊙○⊕○

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Είναι το ίδιο σαν να χωρίσω τις 10 θέσεις σε 3 σύνολα με 5, 3, 2 στοιχεία

Για να διαιρέσω σύνολα σε σύνολα ή να βάλω στοιχεία σε σειρά, χρησιμοποιώ τον πολυωνυμικό συντελεστή!

④ Άσκηση: Τράπουλα ισόποσα σε 4 παίκτες π.χ. Μπριτζ.

P(1 παίκτης παίρνει όλα τα σπαθιά)

P(κάθε παίκτης παίρνει από 1 άσσο)

Λύση: S: Δειγματικός Χώρος: Διαιρέσεις των 52 σε 13, 13, 13, 13

$$|S| = \frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$$

A: ενδεχόμενο ένας παίκτης όλα τα σπαθιά

$$P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\text{όλες οι διαιρ. που 1 παίρνει τα σπαθιά}}{\text{όλες οι διαιρ. των 52 σε 13,13,13,13}} = \frac{\underset{\text{ποιος παίρνει τα σπαθιά}}{4} \cdot \overset{\text{μοιράζω τα υπόλοιπα}}{\dfrac{39!}{13!\,13!\,13!}}}{\dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}}$$

B: ένας Α ο καθένας

$$P(B) = \frac{\overset{\text{μοιράζω άσσους}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \cdot \overset{\text{μοιράζω τα υπόλοιπα}}{\dfrac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}}{\dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}}$$