10.03.10 9^o μάθημα

Ασκήσεις στο Πολλαπλασιαστικό Νόμο

① Πολλαπλασιαστικός Νόμος

υπό την προϋπόθεση $P(E_1 E_2 \dots E_{n-1}) > 0$

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)\,P(E_2 | E_1)\,P(E_3 | E_1 E_2) \dots P(E_n | E_1 E_2 \dots E_{n-1})$$

② Άσκηση: Κάλπη με 10 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια

Τυχαίο Πείραμα: Εξαγωγή 4 σφαιρ. χωρίς επανάθεση

P(όλα τα σφαιρ. άσπρα) = ;

P(1^o, 3^o άσπρα και 2^o, 4^o μαύρα) = ;

10 9 8 7 ← ευνοϊκές

17 16 15 14

↑ δυνατές

$1^η$ λύση: Συνδυαστική

Δ.χ.: τετράδες : όλες οι μεταθέσεις του συνόλου {1,2,3,4} όπου $|S| = 4!$

$$P(\text{όλα τα σφαιρ. άσπρα}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}$$

$$= \frac{\binom{10}{4}\binom{7}{0}}{\binom{17}{4}}$$

↑ εναλλακτικά

$$P(1^o,3^o A,\ 2^o,4^o M) = \frac{10\cdot 7\cdot 9\cdot 6}{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}$$

10 7 9 6 ← ευνοϊκές

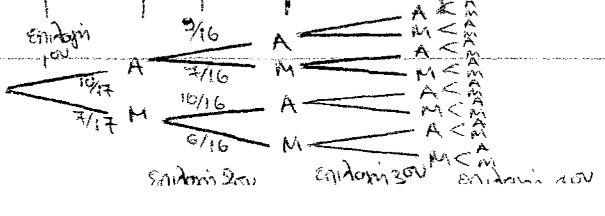
17 16 15 14 ← δυνατές

$2^η$ λύση: Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$P(\text{όλα άσπρα}) = P(1^oA)\,P(2^oA | 1^oA)\,P(3^oA | 1^oA, 2^oA)\,P(4^oA | 1^oA, 2^oA, 3^oA) =$$
$$= \frac{10}{17}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}$$

$$P(1^o,3^o A,\ 2^o,4^o M) = P(1^oA)\,P(2^oM | 1^oA)\,P(3^oA | 1^oA\,2^oM)\,P(4^oM | 1^oA\,2^oM\,3^oA) =$$
$$= \frac{10}{17}\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}$$

Οπτικοποίηση με δέντρο



③ Άσκηση: Έχουμε 7 άτομα να καθίσουν σε σειρά 7 καθισμάτων με διπλή πρόσβαση στο θέατρο.

P(να καθίσουν χωρίς να περάσουν μπροστά από άλλου) = ;

Ονομάζω τα άτομα με τη σειρά αφίξης τους

Λύση:

|6|1|3|2|4|5|7| ← δεν κάνει (μη ευνοϊκή)

|1|2|3|4|5|6|7| ← μου κάνει (ευνοϊκή)

|7|6|4|3|1|2|5| ← μου κάνει (ευνοϊκή)

Θέατρο

1η λύση: Συνδυαστική

Δ.χ. Όλες οι μεταθέσεις του συνόλου $\overset{S}{\{1,2,\dots,7\}}$ οπότε $|S| = 7!$

Ευνοϊκές 7-άδες: έχουν κάπου το 1, αριστερά του 1 σε φθίνουσα σειρά και δεξιά του 1 αύξουσα

= ευνοϊκές με το 1 στη 1η θέση μόνο 1 |1|2|3|4|5|6|7|

+ -||- -||- 2η θέση $6 = \binom{6}{1}$ γιατί με κάποιο μόνο ποιος θα κάτσει στη 1η θέση!

⋮

+ -||- -||- 7η θέση κ.ο.κ.

$$= 1 + 6 + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6$$

$$P(\text{καθίσουν χωρίς να περάσουν μπροστά από άλλου}) = \frac{2^6}{7!}$$

2η λύση: Πολλ/κος Νόμος

$$P\left(\begin{matrix}\text{να καθίσουν χωρίς}\\ \text{να περάσουν μπροστά}\\ \text{από άλλου!}\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{ο έβδομος κάθεται}\\ \text{σε μια άκρη}\end{matrix}\right) P\left(\begin{matrix}\text{ο έκτος κάθεται}\\ \text{σε μια άκρη}\\ \text{από αυτές που μένουν}\end{matrix} \;\middle|\; \right)$$

$$\cdot P\left(\begin{matrix}\text{ο πέμπτος}\\ \text{σε άκρη}\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}\text{οι } 6,7\\ \text{σε άκρη}\end{matrix}\right) \cdots =$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2^6}{7!}$$

④ Άσκηση: 52 τραπουλόχαρτα να μοιραστούν σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ) από 13 ο καθένας (π.χ. μοιρασιά Μπρίτζ)

P(κάθε παίκτης παίρνει 1 A) = ;
$\parallel$
$P_{\text{ζητ}}$

1η λύση: Συνδυαστική

μοιράζω 4 άσσους — μοιράζω τα υπόλοιπα — μοιράζω όλα τα φύλλα

$$P_{\text{ζητ}} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{4! \cdot \frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}{\frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}}$$

2η λύση: Μικτή (Πολ/κος Νόμος + Συνδυαστική)

$$P_{\text{ζητ}} = P\left(\begin{smallmatrix}\text{ο Α παίρνει}\\ \text{έναν άσσο}\end{smallmatrix}\right) P\left(\begin{smallmatrix}\text{ο Β παίρνει}\\ \text{έναν άσσο}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\text{ο Α πήρε}\\ \text{1 άσσο}\end{smallmatrix}\right) P\left(\begin{smallmatrix}\text{ο Γ παίρνει}\\ \text{έναν άσσο}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\text{οι Α, Β}\\ \text{πήραν}\\ \text{άσσο}\end{smallmatrix}\right) P\left(\begin{smallmatrix}\text{ο Δ παίρνει}\\ \text{έναν άσσο}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\text{οι Α, Β, Γ πήραν από}\\ \text{έναν άσσο}\end{smallmatrix}\right)$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} = \frac{4! \cdot \frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}{\frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}}$$

3η λύση: Πολ/κος Νόμος

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\ldots}_{\text{13 φύλλα Α}}\ \underbrace{\square\,\square\ldots}_{\text{13 φύλλα Β}}\ \underbrace{\square\ldots}_{\text{13 φύλλα Γ}}\ \underbrace{\square\ldots}_{\text{13 φύλλα Δ}}$$

Μοιρασιά → Τοποθέτηση σε σειρά των 52 φύλλων

$$P(\text{1 άσσος σε κάθε άτομο}) = P(\underbrace{\text{ο Α}\diamondsuit \text{ πάει σε άτομο διαφ. από αυτό που πήρε Α}\spadesuit}_{= E_1})$$

$$\cdot\, P(\underbrace{\text{ο Α}\heartsuit \text{ πάει σε διαφ. άτομο από αυτά που πήραν } \begin{smallmatrix}\text{Α}\diamondsuit\\ \text{Α}\spadesuit\end{smallmatrix}}_{= E_2} \mid E_1)$$

$$\cdot\, P(\underbrace{\text{ο Α}\clubsuit \text{ πάει σε διαφ. άτομο από αυτά που πήραν } \begin{smallmatrix}\text{Α}\heartsuit\\ \text{Α}\diamondsuit\\ \text{Α}\spadesuit\end{smallmatrix}}_{= E_3} \mid E_1 E_2) =$$

να μην πέσει στα 13 φύλλα που έπεσε το Α τρίφυλλο

$$= \frac{39}{\underset{\substack{\uparrow\\ 52 - \text{Α}\spadesuit}}{51}} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} = \frac{3!\,13^3}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$