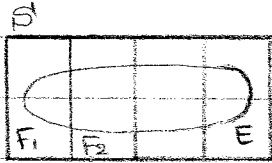


15.03.20 10^ο μάθημα

Μαθηματικά σε Εξέταση Ολικής Πιθανότητας και Bayes

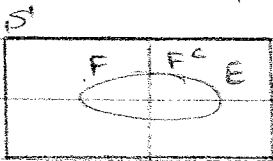
① Εξέταση Ολικής Πιθανότητας



S Σειριακές κάρτες
 $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i αλληλεξαιρούμενες

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) P(E|F_i)$$

Αλληλεξαιρούμενη Εξέταση



$$S = F \cup F^c$$

$$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c)$$

② Bayes

$$P(E|F) \leftrightarrow P(F|E)$$

$$P(F|E) = \frac{P(FE)}{P(E)} = \frac{P(F)P(E|F)}{P(E)}$$

③ Πρόβλημα : σταθμισμένη εταιρεία κερφίει τες ητάνες σε

επιπρετες σε αρώχηματα (30% ηηυδίαμα)

ηηυ επιπρετες σε αρώχηματα (70% ηηυδίαμα)

$P(\text{ηρωαατέγει αρώχημα σε 1 χρόνο} | \text{επιπρετης}) = 40\%$

$P(\text{ηρωαατέγει αρώχημα σε 1 χρόνο} | \text{ηηυ επιπρετης}) = 20\%$

ηρωαα

ηρωαα ηηυδίαμα
 ηηυδίαμα ηηυδίαμα

Ολική Πιθανότητα
 Εξέταση στο ηηυδίαμα

Bayes

$P(\text{επιπρετης} | \text{ηρωαατέγει αρώχημα σε 1 χρόνο}) = ;$

$P(\text{ηρωαατέγει αρώχημα σε 1 χρόνο}) = ;$

$P(\text{επιπρετης} | \text{ηρωαατέγει αρώχημα σε 1 χρόνο}) = ;$

αίσιον: Αέσιμεια Ζησσίμεια

$$P(F) = 0.3 \quad P(FE) = ;$$

$$P(F^c) = 0.7 \quad P(E) = ;$$

$$P(E|F) = 0.4 \quad P(F|E) = ;$$

$$P(E|F^c) = 0.2$$

νόμος Νίπυς

$$P(FE) \stackrel{\downarrow}{=} P(F) P(E|F) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

εθν

$$P(E) = P(F) P(E|F) + P(F^c) P(E|F^c) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.12 + 0.14 = 0.26$$

Bayes

$$P(F|E) = \frac{P(F) P(E|F)}{P(E)} = \frac{0.12}{0.26}$$

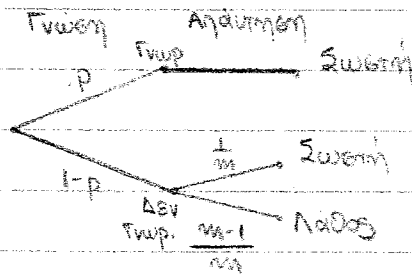
④ άσκηση: 7801 Πόληπιη Επτόπιη με m εαπτασάσες Επτόπιες αα: επάππια.

Μαθπππ (πυρίζει) F αα 1^m επάππια με ηίδασάπια p

Μαθπππ (πάππππ) F^c - || - - || - - || - $1-p$

Όσα παππππ, σπλάζει αα αα.

$$P(\text{πάππππ} | \text{ααππππ}) \stackrel{=}{=} ;$$



$$P(F^c|E) = \frac{P(F^c) P(E|F^c)}{P(E)} = \frac{1-p}{mp + 1-p}$$

πυα $P(E) = P(F) P(E|F) + P(F^c) P(E|F^c) = p \cdot 1 + (1-p) \frac{1}{m}$

Προβππππππ πίδα αα: 1. 7801 απππππ

2. Ααππππππππππππ

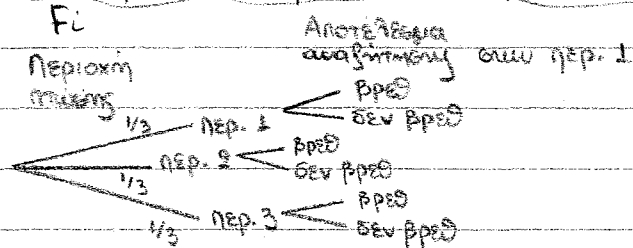
3. 7801 Πόληπιη Επτόπιη

Η επιχείρηση διακινεί σα γάλα με 1M λίτρα

5) Πρόβλεψη: Έρευνα Διακινεί: Αποφασισμένο έχει ηέβει σε 3 περιοχές (από 3 περιοχές (από 3 περιοχές) να έχει ηέβει σε 3 περιοχές)

$$P(\text{να μη βρεθεί σε } \eta_{ep. i} | \text{έχει ηέβει σε } \eta_{ep. i}) = \beta_i$$

$$P(\text{έχει ηέβει σε } \eta_{ep. i} | \text{δεν βρεθεί σε } \eta_{ep. i}) = ; \quad i=1,2,3$$



$$P(F_1 | E) = \frac{P(F_1) P(E|F_1)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3} \beta_1}{\frac{\beta_1 + 2}{3}} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + 2}$$

$$P(F_2 | E) = \frac{P(F_2) P(E|F_2)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{\beta_1 + 2}{3}} = \frac{1}{\beta_1 + 2}$$

$$P(F_3 | E) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{\beta_1 + 2}{3}} = \frac{1}{\beta_1 + 2}$$

γιατί

$$P(E) = P(F_1)P(E|F_1) + P(F_2)P(E|F_2) + P(F_3)P(E|F_3) = \frac{1}{3} \cdot \beta_1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\beta_1 + 2}{3}$$

6) Πρόβλεψη: Χρήση με τ κόμματα και b πηξτε εταρπιδια. Εφαρτε Διακοχικα m εταρπιδια (m ≤ r+b) χωρίς επανασεση.

$$P_1 = P(\text{1}^\circ \text{ εταρπ. να είναι πηξτε, ακολουθια να εταρπιδαν } K \text{ πηξτε}) = ;$$

$$P_2 = P(\text{ακολουθια να εταρπιδαν } K \text{ πηξτε}) = ;$$

$$P_3 = P(\text{1}^\circ \text{ εταρπ. να είναι πηξτε | εταρπ. ακολουθια } K \text{ πηξτε}) = ;$$

$$P_1 = P(F)P(E|F) = \frac{b}{r+b} \cdot \frac{\binom{b-1}{k-1} \binom{r}{m-k}}{\binom{r+b-1}{m-1}}$$

$$P_2 = P(E) = \frac{\binom{b}{k} \binom{r}{m-k}}{\binom{r+b}{m}}$$

$$P_3 = P(F|E) = \frac{P(F)P(E|F)}{P(E)} = \frac{\frac{b}{r+b} \cdot \frac{\binom{b-1}{k-1} \binom{r}{m-k}}{\binom{r+b-1}{m-1}}}{\frac{\binom{b}{k} \binom{r}{m-k}}{\binom{r+b}{m}}} =$$

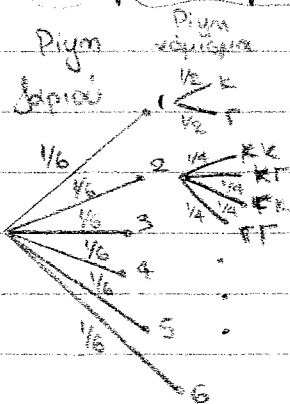
$$= \frac{\frac{b}{r+b} \cdot \frac{r+b}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{k}{m}$$

Χρήση Πρόβλεψη
Για Πρόβλεψη με κόμματα

$$\binom{m}{k} = \frac{m}{k} \binom{m-1}{k-1}$$

⊕ Δύο βήματα: Πιθανοί να περάσει είναι υποχρεωτικά όλες τις φορές
 Σέρβει το ζήτημα

$$P(\text{να περάσει από } K) = ;$$



F_i : να ζήτημα έδεξε i , $i=1, 2, \dots, 6$

$$\text{ΕΘΝ} : P(E) = \sum_{i=1}^6 P(F_i) P(E|F_i) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^i =$$

↑
 η πιθανότητα να περάσει όλες τις φορές

$$= \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{127}{\frac{1}{2}} = \dots$$

⊗ Λόγος πιθανότητας Ευτυχίσεων (odds)

$$\frac{\text{odds να}}{A} = \frac{P(A)}{P(A^c)}$$

Σε υποχρεωτικά είναι 1:1
 Σε ζήτημα να έρθει 6 είναι 1:5

||

Πόσο πιθανότερο είναι να επιβίβει το A από το να μη επιβίβει

⊙ Θεωρ Bayes σε ποσότητα ζήτημα πιθανότητας

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{\frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}}{\frac{P(H^c)P(E|H^c)}{P(E)}} = \frac{P(H)}{P(H^c)} \cdot \frac{P(E|H)}{P(E|H^c)}$$

10 Παράδειγμα: Υπάρχουν δύο υφιστάμενοι σε ένα επιχείρι

A ~> δέχεται κ με π.δ $\frac{1}{2}$

B ~> -11- $\frac{3}{4}$

Διαθέτω υφιστάμενα σε ανώτερο

H: Διαθέτω το A

Αρχικά
odds
αν H :

$$\frac{P(H)}{P(H^c)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Πίεση το υφιστάμενο που δέχεται κ

E: δέχεται κ

τεστα

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

↑
odds
αν H
πριν το
πείραμα
(αρχικά
odds)