17.03.10 11ο μάθημα

Στοχαστική Ανεξαρτησία

① Ορισμός

Διαισθητικά
E, F ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(E|F) = P(E) \Leftrightarrow \frac{P(EF)}{P(F)} = P(E)$
ή
$P(F|E) = P(F) \quad \frac{P(FE)}{P(E)} = P(F)$

$\Bigg\} \Leftrightarrow P(EF) = P(E)P(F)$

Ορισμός: E, F ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(EF) = P(E)P(F)$

Ορισμός Για 3 ενδεχόμενα: E, F, G ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$ και

προκύπτει για $G = S$ δ.χ. $\rightsquigarrow P(EF) = P(E)P(F)$

-||- $E = S$ δ.χ. $\rightsquigarrow P(FG) = P(F)P(G)$

-||- $F = S$ δ.χ. $\rightsquigarrow P(EG) = P(E)P(G)$

Γενικά: $E_1, E_2, \ldots$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ Για κάθε $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ ισχύει
$P(E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_r}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\ldots P(E_{i_r})$

② Ανεξάρτητα - Ασυμβίβαστα

E, F

Ανεξάρτητα: $P(EF) = P(E)P(F)$

Ασυμβίβαστα: $EF = \emptyset \Rightarrow P(EF) = 0$

Συνήθως όταν είναι ασυμβίβαστα, δεν είναι ανεξάρτητα

③ Ανεξάρτητα - Ανεξάρτητα ανά δύο

Συμπίπτουν για 2 ενδεχόμενα. Από 3 ενδεχόμενα και πάνω όχι.

E, F, G ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

E, F, G ανεξάρτητα ανά δύο $\Leftrightarrow$
$P(EF) = P(E)P(F)$
$P(FG) = P(F)P(G)$
$P(EG) = P(E)P(G)$

④ Παράδειγμα

Τράπουλα με 52 φύλλα

Επιλογή φύλλου

E: ήρθε άσσος

F: ήρθε σπαθί

$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$P(F) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(EF) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(E)P(F) \Rightarrow$ E, F ανεξάρτητα

Παραλλαγή: Έστω ότι έλειπε από αρχή ο Άσσος μπαστούνι

Τράπουλα 51 φύλλα

Επιλογή φύλλου

E: είναι άσσος

F: είναι σπαθί

$P(E) = \frac{3}{51}$

$P(F) = \frac{13}{51}$

$P(EF) = \frac{1}{51} \neq \frac{3}{51} \cdot \frac{13}{51} = P(E)P(F) \Rightarrow$ E, F όχι ανεξάρτητα

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{51}}{\frac{13}{51}} = \frac{1}{13}$$

$P(E) = \frac{3}{51}$

$\Downarrow$

$P(E|F) > P(E)$

⑤ Παράδειγμα

Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 ζαριών

E: άθροισμα ενδείξεων είναι 7

F: το 1° ζάρι φέρνει 4

G: το 2° ζάρι φέρνει 3

H: άθροισμα ενδείξεων είναι 6

$P(E) = \frac{6}{36}$ ← $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$P(F) = \frac{1}{6}$

$P(G) = \frac{1}{6}$

$P(H) = \frac{5}{36}$ ← $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(EF) = \frac{1}{36} = P(E)P(F) \Rightarrow E,F \text{ ανεξάρτητα !} \\ P(EG) = \frac{1}{36} = P(E)P(G) \Rightarrow E,G \text{ ανεξάρτητα} \\ P(FG) = \frac{1}{36} = P(F)P(G) \Rightarrow F,G \text{ ανεξάρτητα} \end{array}\right\} \text{ανεξάρτητα ανά δύο}$$

Αλλά

$P(EFG) = \frac{1}{36} \neq P(E)P(F)P(G) \Rightarrow E, F, G$ όχι ανεξάρτητα

$P(HF) = \frac{1}{36} \neq P(H)P(F) \Rightarrow H, F$ όχι ανεξάρτητα

$P(HG) = \frac{1}{36} \neq P(H)P(G) \Rightarrow H, G$ όχι ανεξάρτητα

⑥ Άσκηση: Οικογένεια με 2 παιδιά

Επισκέπτης στην Οικογένεια

Χτυπάει το κουδούνι

Τυχαία ανοίγει κάποιο από τα παιδιά

Διαίσθηση

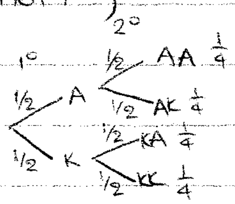
P(το άλλο παιδί κορίτσι | το ένα παιδί κορίτσι) = ; $\quad$ ~~$\frac{1}{2}$~~ $\frac{1}{3}$

P(το άλλο παιδί κορίτσι | το μικρότερο παιδί κορίτσι) = ; $\quad \frac{1}{2}$ ✓

P(το άλλο παιδί κορίτσι | το παιδί που άνοιξε κορίτσι) = ; $\quad \frac{1}{2}$

Τυχαίο Πείραμα: φύλο των 2 παιδιών

$S = \{AA, AK, KA, KK\}$ ~ Δ.χ.

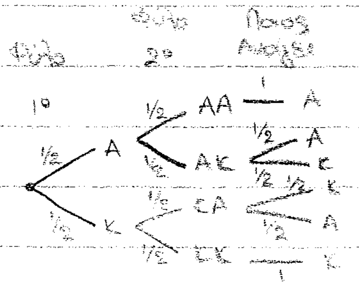


G_1: το πρωτότοκο είναι κορίτσι
G_2: το δευτερότοκο είναι κορίτσι
G: και τα δύο κορίτσια

$$P(G\mid G_1\cup G_2) = \frac{P(G\cap(G_1\cup G_2))}{P(G_1\cup G_2)} = \frac{P(\{KK\})}{P(\{AK, KA, KK\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(G\mid G_1) = \frac{P(GG_1)}{P(G_1)} = \frac{P(G)}{P(G_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Τυχαίο Πείραμα: Επιλογή φύλου παιδιών
Επιλογή παιδιού που ανοίγει



$$P(\text{άλλο παιδί κορ} \mid \text{άνοιξε κορ}) = \frac{P(\text{και τα 2 κορ.})}{P(\text{άνοιξε κορ})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$P(G\mid F) = \frac{P(GF)}{P(F)} = \frac{\overbrace{P(G)}^{=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}{P(F)}$$

G: και τα 2 κορίτσια — F: άνοιξε κορίτσι

$$P(F) = P(G_1G_2)\underbrace{P(F\mid G_1G_2)}_{=1} + P(G_1G_2^c)\underbrace{P(F\mid G_1G_2^c)}_{=\frac{1}{2}} + P(G_1^cG_2)\underbrace{P(F\mid G_1^cG_2)}_{=\frac{1}{2}} + P(G_1^cG_2^c)\underbrace{P(F\mid G_1^cG_2^c)}_{\to 0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$P(G) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

(7) Άσκηση: Έχουμε 3 κάρτες κόκκινη-κόκκινη
κόκκινη-μπλε
μπλε-μπλε

Διαλέγω τυχαία κάρτα και δείχνω τυχαία το χρώμα μιας πλευράς
P(η άλλη πλευρά μπλε | η πλευρά που δείχνουμε είναι μπλε)