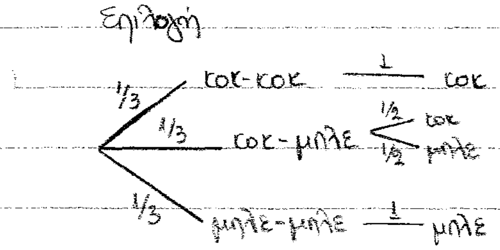
19.03.10 12ο μάθημα

① Άσκηση: 3 κάρτες: κόκκινη-κόκκινη
κόκκινη-μπλε
μπλε-μπλε

P(η άλλη πλευρά μπλε | η μία πλευρά μπλε) = ;

Πείραμα τύχης: Επιλογή κάρτας
Επίδειξη μιας πλευράς



P(η άλλη πλευρά μπλε | η μία πλευρά μπλε) =

$$= \frac{P(\text{μπλε - μπλε})}{P(\text{πλευρά που δείχνεται μπλε})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

γιατί P(πλευρά που δείχνεται μπλε) = P(επιλ κοκ-κοκ) P(δειχν μπλε | επιλ κοκ-κοκ) +
+ P(επιλ κοκ-μπλε) P(δειχν μπλε | επιλ κοκ-μπλε) +
+ P(επιλ μπλε-μπλε) P(δειχν μπλε | επιλ μπλε-μπλε) =
$= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

② Ανεξάρτητες Δοκιμές

Ανεξ. δοκιμές = Επανάληψη πειράματος με ανεξ. αποτελέσματα

π.χ. ρίψη ζαριού
ρίψη νομίσματος

③ Άσκηση: Έχω παίκτες Α, Β. Ρίχνουν νόμισμα εναλλάξ. Ο $1^{ος}$ που φέρνει Κ κερδίζει.

$P(\text{φέρνει ο Α } K) = P(\text{φέρνει ο Β } K) = p$

Ρίψεις ανεξάρτητες

$P(\text{κερδίζει ο Α}) = ;$

Πείραμα τύχης

$$Δ.χ. = \{\underset{\substack{A\\ \text{κερδ.}}}{K},\ \underset{\substack{B\\ \text{κερδ.}}}{ΓK},\ \underset{\substack{A\\ \text{κερδ.}}}{ΓΓK},\ \underset{\substack{B\\ \text{κερδ.}}}{ΓΓΓK},\ \ldots\}$$

$P(\text{κερδ. ο Α}) = P(\text{έρχεται Κ για } 1^{η} \text{ φορά σε περιττή ρίψη}) =$

$$= \underset{K}{p} + \underset{ΓΓK}{(1-p)^2 p} + \underset{ΓΓΓΓK}{(1-p)^4 p} + (1-p)^6 p + \ldots = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{2i} =$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}.$$

για $p = \frac{1}{2} \rightarrow P(\text{κερδ. ο Α}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$

$2^{η}$ λύση: E: ενδεχόμενο κερδίζει ο Α

F: η $1^{η}$ ρίψη είναι Κ

Δεσμεύω στο $1^{ο}$ στάδιο
Ανάλυση $1^{ου}$ βήματος
Αναγωγικός Συλλογισμός

Θεωρ. ολ. π.θ. $P(E) = \underbrace{P(F)}_{p}\, \underbrace{P(E|F)}_{1} + \underbrace{P(E)}_{1-p}\, \underbrace{P(F|E)}_{1-P(E)}$

$\Rightarrow P(E) = p + (1-p)(1-P(E)) = p + (1-p) - (1-p)P(E)$

$\Rightarrow (2-p)P(E) = 1 \quad \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2-p}$

ή

$$P(E) = \underset{K}{p} \cdot \underset{\substack{\text{γιατί κερδίζει}\\ \text{ο Α}}}{1} + \underset{ΓK}{(1-p)p} \cdot \underset{\substack{\text{γιατί κερδίζει}\\ \text{ο Β}}}{0} + \underset{ΓΓ}{(1-p)(1-p)}\, \underset{\substack{\text{γιατί το παιχνίδι}\\ \text{ξαναρχίζει}}}{P(E)}$$

④ Άσκηση: 3 παίκτες Α, Β, Γ ρίχνουν νομίσματα διαδοχικά, αρχίζ. απ' τον Α, μετά ο Β, μετά ο Γ

$P(K \text{ για τον } A) = p$

$P(K \text{ για τον } B) = q$

$P(K \text{ για τον } \Gamma) = r$

Κερδίζει ο 1ος με Κ

$P(\text{κερδ ο } A)$

1η λύση: $P(\text{κερδ ο } A) = P(1\text{η φορά } K \text{ σε κάποια από τις } 1, 4, \overset{3\kappa+1}{7}, 10 \ldots) =$

$= p + (1-p)(1-q)(1-r)p + ((1-p)(1-q)(1-r))^2 p + \ldots =$

$= p \sum_{i=0}^{\infty} ((1-p)(1-q)(1-r))^i =$

$$= \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$

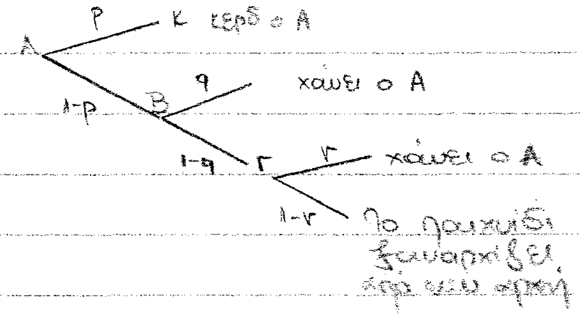
2η λύση: $P(\text{κερδ ο } A) = P(K \text{ στην } 1\text{η}) P(\text{κερδ ο } A \mid K \text{ στην } 1\text{η}) +$

$+ P(K \text{ στην } 2\text{η κ' όχι στην } 1\text{η}) (P \text{ κερδ ο } A \mid \quad)$

$+ P(K \text{ στην } 3\text{η κ' όχι } 1\text{η}, 2\text{η}) (P \text{ κερδ ο } A \mid \quad)$

$+ P(K \text{ όχι στις 3 πρώτες}) P(\text{κερδ ο } A \mid K \text{ όχι στις 3 πρώτες}) =$

$= p \cdot 1 + (1-p)q \cdot 0 + (1-p)(1-q)r \cdot 0 + (1-p)(1-q)(1-r) P(\text{κερδ ο } A)$



$\Longrightarrow$

$(1-(1-p)(1-q)(1-r)) P(\text{κερδ ο } A) = p$

$\Longrightarrow$

$$P(\text{κερδ ο } A) = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$

⑤ Άσκηση: Ρίχνονται 2 ζάρια κατ' επανάληψη. Βλέπω το άθροισμα της ζαριάς.

$P($έρχεται άθροισμα 5 πριν να έρθει άθροισμα 7$) = ;$

1η Λύση: $P\Big(\underbrace{\text{έρχεται αθρ. 5 πριν να έρθει 7}}_{E}\Big) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \circledast$

E_i: στις ρίψεις $1, 2, \ldots, i-1$ δεν έχει έρθει αθρ 5 ούτε αθρ. 7 και στη ρίψη i εμφ. το αθρ. 5

Σε μία ρίψη: $P(\text{αθρ. } 5) = \frac{4}{36}$ ← $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$P(\text{αθρ. } 7) = \frac{6}{36}$ ← $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$P(\text{αθρ ούτε 5 ούτε 7}) = \frac{26}{36}$

$$\circledast \ \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \frac{4}{36} = \frac{\frac{4}{36}}{1-\frac{26}{36}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2η Λύση: A_1: 1η ρίψη είναι 5

A_2: -"- 7

A_3: -"- ούτε 5, ούτε 7

$$P(E) = \underbrace{P(A_1)}_{4/36} \underbrace{P(E|A_1)}_{1} + \underbrace{P(A_2)}_{6/36} \underbrace{P(E|A_2)}_{0} + \underbrace{P(A_3)}_{26/36} \underbrace{P(E|A_3)}_{P(E)}$$

$$\left(1-\frac{26}{36}\right) P(E) = \frac{4}{36} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{5}$$

⑥ Η δεσμευμένη πιθανότητα ως νέο μέτρο πιθανότητας

Δεδομένων → Ω δ.χ

→ F ενδεχόμενο ($F \subseteq \Omega$) $\xrightarrow{\text{ορίζω}}$ $P_F(E) = P(E|F)$

→ P πιθανότητα

Τότε P_F πιθανότητα

(i) $0 \leq P_F(E) \leq 1$

(ii) $P_F(S) = 1$

(iii) $P_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_F(E_i)$ για E_i ασυμβίβαστα

Άρα μπορώ να χρησιμοποιώ όλα τα θεωρ. με δέσμευση ως προς κάποιο ενδεχόμενο.

π.χ. $P(E_1 E_2 E_3 \ldots E_n | F) = P(E_1|F)\, P(E_2 | E_1 F)\, P(E_3 | E_1 E_2 F) \ldots$
$\ldots P(E_n | E_1 E_2 \ldots E_{n-1} F)$

$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, F_i ασυμβίβαστα $\Rightarrow P(E|F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i|F)\, P(E|F_i F)$