22.03.10 $13^{ο}$ μάθημα

Τυχαίες Μεταβλητές και Συνάρτηση Κατανομής

① Τυχαία Μεταβλητή

Πείραμα Τύχης

Διαισθητικά: Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.) → Αριθμητικός χαρακτήρας πειράματος

Μαθηματικά: Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.) → Συνάρτηση $X : \underset{\text{δειγμ. χώρος}}{\underset{\uparrow}{S}} \to \mathbb{R}$

② Παράδειγμα 1ο

Ρίψεις δίκαιου νομίσματος 3 φορές
(Ανεξ.)

Δειγμ. χώρος: $S = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

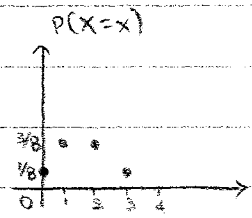
$X = \#Κ$: 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0

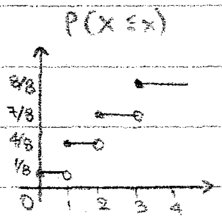
$P(X=0) = P(\{ΓΓΓ\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P(\{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P(\{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = P(\{ΚΚΚ\}) = \frac{1}{8}$





③ Παράδειγμα 2ο

Ανεξ. ρίψεις νομίσματος με πιθ. Κ p μέχρι να έρθει η 1η Κ ή να γίνουν n ρίψεις

$S = \{\underset{1}{Κ}, \underset{2}{ΓΚ}, \underset{3}{ΓΓΚ}, \ldots, \underset{n-1}{\underbrace{ΓΓ\ldots Γ}_{n-2}Κ}, \underset{n}{\underbrace{ΓΓ\ldots Γ}_{n-1}Κ}, \underset{n}{\underbrace{ΓΓ\ldots ΓΓ}_{n}}\}$

$X = \#$ ρίψεων που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί το πείραμα

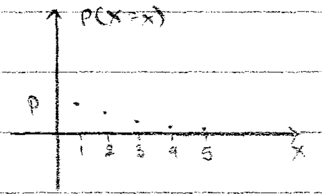
X παίρνει τιμές στο $\{1,2,\dots,n\}$

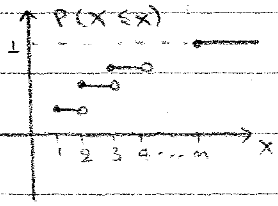
$P(X=i) = P(\{\underbrace{ΓΓ\dots Γ}_{i-1\ "Γ"}\underbrace{Κ}_{1\ "Κ"}\}) = (1-p)^{i-1}p \quad , 1 \le i \le n-1$

$P(X=n) = P(\{\underbrace{ΓΓ\dots Γ}_{n-1}Κ, \underbrace{ΓΓΓ\dots Γ}_{n}\}) = (1-p)^{n-1}p + (1-p)^{n} = (1-p)^{n-1}$

$P(X=x) \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1}\cdot p + (1-p)^{n-1} = p\cdot\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} + (1-p)^{n-1} = 1$

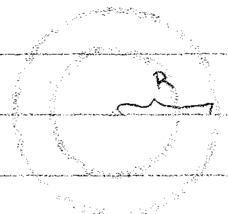




④ Παράδειγμα 3ο

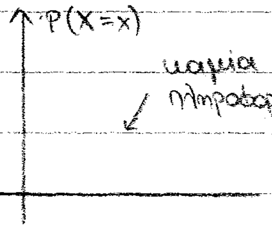
Πείραμα τύχης: Επιλογή τυχαίου σημείου σε κυκλ. δίσκο ακτίνας R

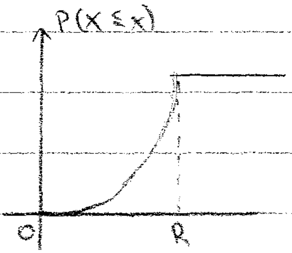
X = απόσταση του σημείου από το κέντρο του κυκλικού δίσκου



$P(X=x)=0$ για κάθε $x \in [0,R]$

$P(X \le x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \left(\frac{x}{R}\right)^2 \quad , x \in [0,R]$





⑤ Συμπεράσματα

* Διαφορετική προσέγγιση όταν η τ.μ. παίρνει διακριτές ή συνεχείς τιμές.

* Η $P(X=x)$ καλή για διακριτή

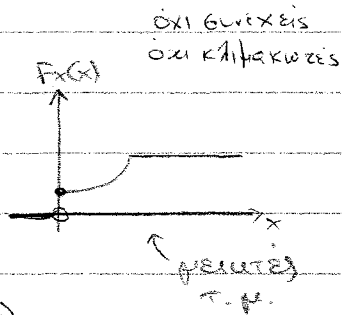
καλή για συνεχή
$\quad\quad\quad\quad$ ‖
(πάντα 0)

⑥ Ορισμός

Έστω X τ.μ. Ορίζουμε $F_X(x)=P(X\le x)$, $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ λέγεται αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της X

⑦ Ιδιότητες της σ.κ.

1. $F_X(x)$ ↗ (αύξουσα)
2. $\lim_{x\to\infty}F_X(x)=1$
3. $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$
4. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής $\lim_{x\to x_0^+}F_X(x)=F_X(x_0)$
5. Για διακριτές τ.μ. είναι κλιμακωτή συνάρτηση
6. Για συνεχείς τ.μ. είναι συνεχής συνάρτηση
7. $\lim_{x\to x_0^-}F_X(x_0)=P(X<x_0)$
8. $P(X=x_0)=F_X(x_0)-\lim_{x\to x_0^-}F_X(x)=\lim_{x\to x_0^+}F_X(x)-\lim_{x\to x_0^-}F_X(x)$
9. $P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$, $a\le b$



⑧ Αποδείξεις

$A\subseteq B$
$P(A)\le P(B)$

1. $x\le y \Rightarrow (-\infty,x]\subseteq(-\infty,y] \Rightarrow P(X\le y)=P(X\in(-\infty,x])\le P(X\in(-\infty,y])=P(X\le y) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_X(x)\le F_X(y) \Rightarrow F_X$ ↗

2. Αρχή Μεταφοράς $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$

$\Updownarrow$

$\forall$ ακολ. $x_n\to x_0$:

$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\ell$

Για f μονότονες αρκεί να περιοριστώ σε μονότονες ακολουθίες
(Χρειάζεται για 2. 3. 4. 7.)
Παίρνω $x_n \to \infty$ αύξουσα
$(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \subseteq (-\infty, x_3] \subseteq \dots$

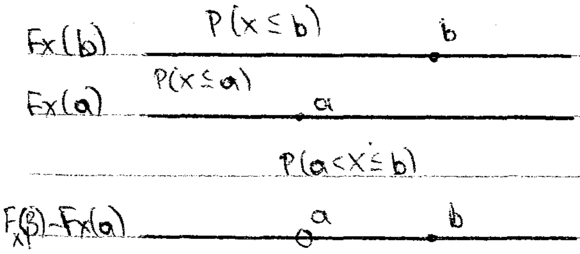
$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \in (-\infty, x_n]) =$ $A_n \uparrow$ αύξουσα ακολουθία

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in (-\infty, x_n]\}\right) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$$

9. $P(a < X \le \beta) = P(\{X \in (-\infty, \beta]\} \cap \{X \in (-\infty, a]\}^c) =$

$$= P(\{X \in (-\infty, \beta]\}) - P(\{X \in (-\infty, a]\}) =$$

$$= F_X(\beta) - F_X(a)$$



αριστερό όριο

$$P(a \le X \le \beta) = F_X(\beta) - F_X(a) + \underset{F_X(a) - F_X(a^-)}{P(X=a)} = F_X(\beta) - F_X(a^-)$$

$$P(a \le X < \beta) = F_X(\beta^-) - F_X(a^-)$$

$$P(a < X \le \beta) = F_X(\beta) - F_X(a)$$

$$P(a < X < \beta) = F_X(\beta^-) - F_X(a)$$