21.03.10 14° μάθημα

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

① Ορισμός : X διακριτή τ.μ. $\overset{\text{ορσ.}}{\Leftrightarrow} \exists \{x_0, x_1, x_2, \dots\}, P(\{x_0, x_1, \dots\}) = 1$

Η συνάρτηση $p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & x = x_i \text{ για κάποιο } i \\ 0, & x \neq x_i \text{ για όλα τα } i \end{cases}$ → $P(X=x)$ λέγεται συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της X.

Σχέση σ.κ με σ.π.

$p(x) = P(X = x)$

$F(x) = P(X \leq x) \Rightarrow F(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$

$p(x) = F(x) - \underset{\lim_{y \to x^-} F(y)}{\underset{\shortparallel}{F(x^-)}}$

$P(x \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$

② Ιδιότητες

i) $p(x) \geq 0$

ii) $\sum_x p(x) = 1$

③ Παράδειγμα 1°

X = # επισκέψεων σε μία τράπεζα σε μία μέρα

$P(X = x) = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{σταθ.} \\ \text{άγνωστη}}}{c} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2 \dots$ λ: γνωστή σταθ.

i) $c = ;$

ii) $P(X = 0) = ;$

iii) $P(X \geq 2) = ;$

iv) $P(X = 3 \mid X \geq 2) = ;$

i) $\sum_x p(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c \frac{\lambda^x}{x!} = 1 \Rightarrow c \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1 \Rightarrow c = e^{-\lambda}$

ii) $P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$

$P(X=0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0} = e^{-\lambda}$

$P(X=1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$

iii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - p(0) - p(1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$

iv) $P(X = 3 \mid X \geq 2) = \dfrac{\overbrace{P(X=3, X \geq 2)}^{X=3}}{P(X \geq 2)} = \dfrac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!}}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}$

④ Μέση Τιμή

X = τ.μ. = χαρακτηριστικό κάποιου πειράματος

1η Διαισθητική Ερμηνεία : Μέση τιμή της X = $\dfrac{\text{Άθροισμα } n \text{ μετρήσεων του χαρακτηριστικού}}{n}$

$P(X = x)$ = ποσοστό του πληθυσμού που αντιστοιχεί στη τιμή x του χαρακτηριστικού που εξετάζουμε

Έστω ότι έχουμε πληθυσμό μεγέθους N

$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots =$

N_0: #ατόμων με $X=0$, N_1: #ατόμων με $X=1$

$p(x) = P(X = x) = \dfrac{N_x}{N}$

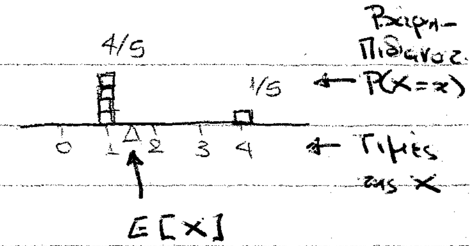
Μέση Τιμή της X = $\dfrac{\underbrace{0+0+0+\ldots}_{N_0} + \underbrace{1+1+1+\ldots}_{N_1} + \underbrace{2+2+\ldots}_{N_2}}{N} = \dfrac{0 \cdot N_0 + 1 \cdot N_1 + 2 \cdot N_2 + \ldots}{N} =$

$= 0 \cdot \underbrace{\frac{N_0}{N}}_{p(0)} + 1 \cdot \underbrace{\frac{N_1}{N}}_{p(1)} + 2 \cdot \underbrace{\frac{N_2}{N}}_{p(2)}$

Μαθηματικός Ορισμός : Μέση Τιμή της X : $E[X] = \sum_x x\, p(x)$

υπό την προϋπόθεση ότι $\sum_x |x|\, p(x) < \infty$

2η Διαισθητική (φυσική) Ερμηνεία : Κέντρο Βάρους



π.χ. $X \in \{1,4\}$

$P(X=1) = \frac{4}{5}$

$P(X=4) = \frac{1}{5}$

$$E[X] = \sum_x x p(x) = 1\cdot p(1) + 4\cdot p(4) = 1\cdot \frac{4}{5} + 4\cdot\frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

3η Διαισθητική (αναφορική) Ερμηνεία : με όρους στοιχ/παιχν, X = κέρδος

π.χ. Παιχν. Ρίχνω νομ. 2 φορές — $E[X]$ = μέσο κέρδος

2Κ → 4 € κερδίζω

1Κ → 2 € χάνω — X = # κορ.

0Κ → 1 € χάνω

$$E[X] = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{4}\cdot 4 = -\frac{1}{4} - 1 + 1 = -\frac{1}{4} < 0$$ Ασύμφορο παιχνίδι

↳ μέσο κέρδος

(5) Παράδειγμα 1ο

Ρίψη ζαριού και X = η ένδειξη που ήρθε

x	P(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$E[X] = \sum_x x p(x) = \sum_{x=1}^{6} x\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) =$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{6\cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$$

(6) Παράδειγμα 2ο

Τυχαίο πείραμα με δ.χ. S, $A \subseteq S$ ενδεχόμενο

Δείκτρια ⇝ $I_A = \begin{cases} 1, & A \text{ πραγμ.} \\ 0, & A \text{ δεν πραγμ.} \end{cases}$

$$E[I_A] = 0\cdot P(I_A = 0) + 1\cdot P(I_A = 1) = P(I_A = 1) = P(A)$$

⑦ Παράδειγμα 3°

(δεν χάνει τα κέρδη από την 1η ερώτηση αν χάσει στη 2η ερώτηση)

Διαγωνιζόμενος θα απαντήσει σε 2 ερωτήσεις : 1 Γεωγραφίας
1 Ιστορίας

P(απαντ. σωστά Γεωγραφία) = p_1

P(απαντ. σωστά Ιστορία) = p_2

Αμοιβή αν απαντ. σωστά στη Γεωγραφία = v_1

Αμοιβή αν απαντ. σωστά στη Ιστορία = v_2

Συνεχίζει στη 2η ερώτηση μόνο αν απαντήσει σωστά στη 1η

π.χ. 40% — 60% — σιγουριά διαγωνιζόμενου

$\boxed{\text{Γεωγρ.}}$ — $\boxed{\text{Ιστορία}}$ — είδος ερώτησης

$v_1 = 100$ — $v_2 = 80$ — αμοιβή

Τι είναι καλύτερο να κάνει; Να αρχίσει με Γεωγραφία ή Ιστορία

• X = Κέρδη αν αρχίσει με Γεωγραφία

$X \in \{0, v_1, v_1+v_2\}$

$P(X=x): 1-p_1, \quad p_1(1-p_2), \quad p_1p_2$ (αν δεν είμαι σίγουρος, τσεκάρω αν αθροίζουν στο 1)

$E[X] = \sum_x x\,p(x) = 0\cdot(1-p_1) + v_1\cdot p_1(1-p_2) + p_1p_2(v_1+v_2)$

• Y = Κέρδη αν αρχίσει με Ιστορία

$Y \in \{0, v_2, v_1+v_2\}$

$P(Y=y): 1-p_2, \quad p_2(1-p_1), \quad p_1p_2$

$E[Y] = \sum_y y\,p(y) = 0\cdot(1-p_2) + v_2\cdot p_2\cdot(1-p_1) + p_1p_2(v_1+v_2)$

Συμφέρει να αρχίσω με Ιστορία αντί Γεωγραφίας

$\Leftrightarrow E[Y] \geq E[X]$

$\Leftrightarrow v_2p_2(1-p_1) + \cancel{(v_1+v_2)p_1p_2} \geq v_1p_1(1-p_2) + \cancel{(v_1+v_2)p_1p_2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{v_2p_2}{1-p_2} \geq \dfrac{v_1p_1}{1-p_1}$

π.χ. $p_1 = 40\%$ $\quad p_2 = 60\%$ $\qquad \dfrac{v_2p_2}{1-p_2} = \dfrac{80\cdot 0.6}{0.4} = \dfrac{80\cdot 6}{4} = 120$

$v_1 = 100$ $\quad v_2 = 80$ $\qquad \dfrac{v_1p_1}{1-p_1} = \dfrac{100\cdot 0.4}{0.6} = \dfrac{100\cdot 4}{6} = 66.66$

Άρα πρέπει να αρχίσω με Ιστορία

(8) Παράδειγμα 4°

Φοιτητική εκδρομή σε 3 πούλμαν

1° → 50 φοιτητές

2° → 40 φοιτητές

3° → 48 φοιτητές

Τυχαίο Πείραμα:

1°: Διαλέγω τυχαία πούλμαν : X = # φοιτητών στο πούλμαν

2°: Διαλέγω τυχαία φοιτητή : Y = # φοιτητών στο πούλμαν του φοιτητή που επιλέχθηκε