26.03.10 15° μάθημα

Μέση Τιμή - Διασπορά

① Μέση Τιμή

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p(x) = P(X=x)$

$E[X] = \sum_x x\,p(x)$ ← Μέτρο θέσης της τ.μ.

② Διασπορά

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p(x) = P(X=x)$ και $\mu = E[X]$

$Var[X] = E[(X-\mu)^2]$ ← Μέτρο μεταβλητότητας της τ.μ.

↑ Διασπορά

③ Παράδειγμα 1°

X

x	-1	0	1
p(x)	1/4	1/2	1/4

Y

y	-100	0	100
p(y)	1/4	1/2	1/4

Z

z	-100	0	100
p(z)	1/1000	998/1000	1/1000

Για όλες $\mu = 0$

$E[X] = (-1)\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0$

$Var[X] = E((X-\mu)^2) = E[X^2] =$

$= P(X^2=1)\cdot 1 + P(X^2=0)\cdot 0 = 1/2$

$E[Y] = 0$

$Var[Y] = E((Y-\mu)^2) = E[Y^2] =$

$= P(Y^2=100^2)\cdot 100^2 + P(Y^2=0)\cdot 0 = 5000$

$E[Z] = 0$

$Var[Z] = E((Z-\mu)^2) = E[Z^2] =$

$= P(Z^2=100^2)\cdot 100^2 + P(Z^2=0)\cdot 0 =$

$= 10000 \cdot \frac{2}{1000} = 20$

④ Μέση Τιμή συνάρτησης τ.μ.

X τ.μ. διακριτή με σ.π. $p(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Y = g(X)$ τ.μ. διακριτή

$E[Y] = E[g(X)] = ;$

π.χ.

$X \in \{-2,-1,0,1,2\}$

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/9$	$2/9$

$g(x) = x^2$

$Y = g(X) = X^2 \in \{0,1,4\}$

y	0	1	4
$P_Y(y)$	$1/3$	$5/18$	$7/18$

$E[Y] = 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 5/18 + 4 \cdot 7/18 = \frac{33}{18}$

1^{os} τρόπος : $p_X(x) \to p_Y(y) \to E[Y]$

2^{os} τρόπος : $p_X(x) \to E[Y]$

Θεώρημα : $E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$

Στο παράδειγμα: $E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = (-2)^2 \frac{1}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (0)^2 \cdot \frac{1}{3} + (1)^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{33}{18}$

Απόδειξη Θεωρήματος : $Y = g(X)$

$$E[g(X)] = E[Y] \overset{\text{ορσ.}}{=} \sum_y y\, \underset{P(Y=y)}{p_Y(y)} = \sum_y y \sum_{x:\, g(x)=y} p_X(x) =$$

$$= \sum_y \sum_{x:\, g(x)=y} y\, p_X(x) = \sum_y \sum_{x:\, g(x)=y} g(x)\, p_X(x) = \sum_x g(x)\, p_X(x)$$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ : $E[g(X)] = g(E[X])$ ~> Ισχύει μόνο αν g γραμμική

Προσοχή! Όχι γενικά!

π.χ. $E[X^2] \neq E^2[X]$

$E[3X^2 e^X] \neq 3 E^2[X]\, e^{E[X]}$

5 Ιδιότητες Μέσης Τιμής και Διασποράς

X διακριτή τ.μ. και $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

1. $E[Y] = aE[X] + b$ ~ Γραμμικότητα της μέσης τιμής
2. $Var[Y] = a^2 Var[X]$

π.χ. X = ύψος σε cm και X = θερμοκρασία σε $^\circ C$

Y = ύψος σε ft, Y = θερμοκρασία σε $^\circ F$

$Y = aX$, $Y = 32 + \frac{9}{5}X$

$E[Y] = aE[X]$, $E[Y] = 32 + \frac{9}{5}E[X]$

Απόδειξη: 1. $E[aX+b] = \sum_x (ax+b)\,p_X(x) = \sum_x ax\,p_X(x) + \sum_x b\,p_X(x) =$

$$= a\sum_x x\,p_X(x) + b\sum_x p_X(x) = aE[X] + b$$

2. $Var(aX+b) = E[(aX+b - E[aX+b])^2] =$

$$= E[(aX+b - aE[X]+b)^2] =$$

$$= E[a^2(X - E[X])^2] =$$

$$= a^2 E[(X-E[X])^2] = a^2 Var[X]$$

6 Εναλλακτικός Υπολογισμός της Διασποράς $Var[X]$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

Απόδειξη: Έστω $\mu = E[X]$

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2)\,p(x) =$$

$$= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x\,p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) =$$

$$= E[X^2] - 2\mu\cdot\mu + \mu^2\cdot 1 = E[X^2] - E^2[X]$$

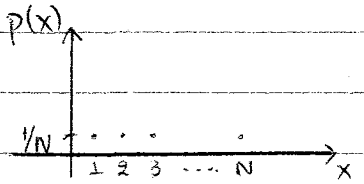
⑦ Ομοιόμορφη Διακριτή Κατανομή

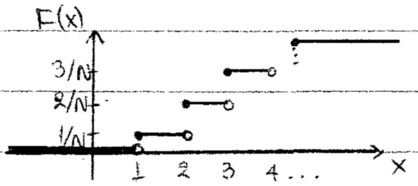
Πείραμα Τύχης: Τυχαία επιλογή αριθμού από το 1 ως το N

X = αριθμός που επιλ.

$P(X \in \{1,2,3,\dots,N\}) = 1.$

$$p(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x=1,2,\dots,N \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$





$F(x) = P(X \le x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{N}, & 1 \le x < N \\ 1, & x \ge N \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_x x\,p(x) = \sum_{x=1}^{N} x \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N}(1+2+\dots+N) = \frac{1}{\cancel{N}}\cdot\frac{(N+1)\cancel{N}}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] =$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p(x) = \sum_{x=1}^{N} x^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}(1^2+2^2+\dots+N^2) =$$

$\hookrightarrow \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N(N+\frac{1}{2})(N+1)}{3}$

$$= \frac{1}{\cancel{N}}\,\frac{\cancel{N}(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

Άρα
$$Var[X] = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)(N+1)}{4} =$$

$$= (N+1)\,\frac{4N+2-3N-3}{12} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

⑧ Παράδειγμα - Άσκηση

Φοιτητές και τμήματα

1^o τμήμα : 50 φοιτ.

2^o τμήμα : 40 φοιτ.

3^o τμήμα : 48 φοιτ.

Πείραμα 1^o : Επιλογή τυχ. τμήματος $X = \#$ φοιτ. του τμήματος

Πείραμα 2^o : Επιλογή τυχ. φοιτητή $Y = \#$ φοιτ. του τμήματος του επιλ. φοιτητ

X :

x	50	40	48
$P(X=x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$E[X] = 50 \cdot \frac{1}{3} + 48 \cdot \frac{1}{3} + 40 \cdot 1/3$

Y :

y	50	40	48
$P(Y=y)$	$50/138$	$40/138$	$48/138$

$E[Y] = 50 \cdot \frac{50}{138} + 40 \cdot \frac{40}{138} + 48 \cdot \frac{48}{138}$

Αν κάνω τις πράξεις : $E[X] < E[Y]$

Την ίδια λογική έχει όταν μου λένε ότι το λεωφορείο έρχεται κάθε 10 λεπτά, αλλά εγώ έχω την αίσθηση ότι έρχεται κάθε 20 λεπτά!