12.04.10 16ο μάθημα

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

① Υπενθύμιση

X διακριτή $\Leftrightarrow P(X \in \{x_0, x_1, \ldots\}) = 1$

$p(x) = P(X = x)$ ← συνάρτηση πιθανότητας

$F(x) = P(X \leq x)$ ← συνάρτηση κατανομής

$E[X] = \sum_x x\, p(x)$

$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \sigma^2$

$\sigma = SD = \sqrt{Var[X]}$ ← τυπική απόκλιση (standard deviation)

$E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p(x)$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] \geq 0$

Γενικά $E[g(X)] \neq g(E[X])$

Αλλά:

$$E[aX+b] = aE[X] + b$$

$$Var[aX+b] = a^2\, Var[X]$$

$$SD[aX+b] = |a|\, SD[X]$$

② Ομοιόμορφη Διακριτή στο $\{1, 2, \ldots, N\}$

Τυχαίο πείραμα: τυχαία επιλογή αριθμού στο $\{1, \ldots, N\}$

$p(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}, \quad x = 1, 2, \ldots, N$

$E[X] = \frac{N+1}{2}$

$Var[X] = \frac{N^2 - 1}{12}$

③ Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

Τυχαίο πείραμα: ακολουθία ανεξ. δοκιμών με πιθ επιτ → p

πιθ αποτ → $1-p$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ με X_i ανεξάρτητες

$P(X_i = 1) = p$

$P(X_i = 0) = 1 - p$

Διακρ. τ.μ.

X = # επιτ στην $1^η$ δοκιμή $(= X_1)$ ← Bernoulli (p)

Y = # επιτ στις n πρώτες δοκιμές $\left(= \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ ← Διωνυμική BIN (n,p)

W = # δοκιμών μέχρι την $1^η$ επιτυχία ← Γεωμετρική GEOM (p)

Z = # δοκιμών μέχρι την $n^η$ επιτυχία ← Αρνητική Διωνυμική NEG BIN (n,p)

π.χ. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$

$X=0$

$n=5 \to Y=1, \; n=10 \to Y=4$

$W=4$

$n=2 \to Z=7, \; n=4 \to Z=10$

④ Bernoulli (p)

$X \in \{0,1\}$

$$P(X=x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases} = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1$$

$$E[X] = \sum_x x\,p(x) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p(x) = 0^2(1-p) + 1^2\cdot p = p$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = p - p^2 = p(1-p)$$

⑤ Διωνυμική Bin (n,p) $\quad P(Y=x) = ?\cdot p^x(1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$? \to \binom{n}{x}$

$Y \in \{0,1,2,\dots,n\}$ $\qquad x=0,1,\dots,n$

$n=4$ $\quad 0000 \to P(Y=0) = p^0(1-p)^4 \quad \binom{4}{0}$

1000
0100
0010
0001 $\to P(Y=1) = 4p^1(1-p)^3 \quad \binom{4}{1}$

1100
1010
1001
0110
0101
0011 $\to P(Y=2) = 6p^2(1-p)^2 \quad \binom{4}{2}$

1110
1101
1011
0111 $\to P(Y=3) = 4p^3(1-p)^1 \quad \binom{4}{3}$

1111 $\to P(Y=4) = p^4(1-p)^0 \quad \binom{4}{4}$

$$(1+t)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} t^x$$

$$p(x) = P(Y=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$E[Y] = \sum_x x\,p(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np$$

1ος τρόπος: $\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x \neq 0$

$$\hookrightarrow E[Y] = \sum_{x=1}^{n} x \frac{n}{x} \underbrace{\binom{n-1}{x-1}}_{y} p^x (1-p)^{n-x} = n \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^{y+1} (1-p)^{n-y-1} =$$

$$= np(1-p)^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} \left(\frac{p}{1-p}\right)^y = np(1-p)^{n-1}\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{n-1} =$$

$= np$ άρα $E[Y] = np$

2ος τρόπος: $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} t^x = (1+t)^n \xrightarrow{d/dt} \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} t^{x-1} = n(1+t)^{n-1}$

$$E[Y] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (1-p)^n \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x =$$

$$= (1-p)^n n \left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{n-1} \frac{p}{1-p} = (1-p)^n n \left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1} \frac{p}{1-p} = np$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p)$$

γιατί

$$E[Y^2] = \sum_x x^2 p(x) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

1ος τρόπος: $\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x \neq 0$

$$E[Y^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{n}{x} \underbrace{\binom{n-1}{x-1}}_{y} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= n \sum_{y=0}^{n-1} (y+1) \binom{n-1}{y} p^{y+1} (1-p)^{n-1-y} =$$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} (y+1) \underbrace{\binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y}}_{\text{συνάρτηση πιθανότητας της } Bin(n-1,p)} = np((n-1)p+1) =$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

Διωνυμική $Bin(n,p)$: $p(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$

$$E[X] = np$$

$$Var[X] = np(1-p)$$

π.χ. 100 ρίψεις ζαριού

Y = # εμφανίσεων πολλαπλασίων του 3

$E[Y] = ;$

$Var[Y] = ;$

Αυτό $n = 100$ δοκιμών Bernoulli με επιτ = πολ. του 3
και με p = πιθ. επιτ $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, άρα

$E[Y] = np = \frac{100}{3}$

$Var[Y] = np(1-p) = \frac{100}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{9}$