16.04.10 18° μάθημα

Ειδικές Διακριτές Κατανομές

① Ανεξάρτητες Δοκιμές Bernoulli

$X_1, X_2, \dots$ $\quad P(X_i = 1) = p$

$\qquad\qquad\quad P(X_i = 0) = 1-p$

W = # δοκιμών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία $\sim Geom(p)$ στο $\{1,2,\dots\}$

Z = # δοκιμών μέχρι την $n^{η}$ επιτυχία $\sim NegBin(n,p)$ στο $\{n, n+1, \dots\}$

$P(W=i) = p(1-p)^{i-1}, \; i=1,2,\dots \quad E[W] = \frac{1}{p} \quad Var[W] = \frac{1-p}{p^2}$

$P(Z=i) = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}, \; i=n, n+1, \dots \quad E[Z] = \frac{n}{p} \quad Var[Z] = \frac{n(1-p)}{p^2}$

W' = # αποτυχιών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία Geom $\quad W' = W-1$

Z' = # αποτυχιών μέχρι την $n^{η}$ επιτυχία NegBin $\quad Z' = Z-n$

στο $\{0,1,2\dots\}$

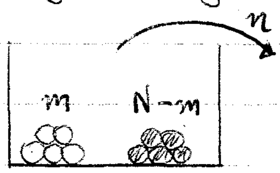
$P(W'=i) = P(W=i+1) = p(1-p)^i, \; i=0,1,\dots$

$P(Z'=i) = P(Z=i+n) = \binom{i+n-1}{n-1} p^n (1-p)^i, \; i=0,1,\dots$

$$\left.\begin{aligned} E[W'] &= E[W]-1 = \frac{1-p}{p} \\ E[Z'] &= E[Z]-n = \frac{n(1-p)}{p} \end{aligned}\right\} \text{γιατί } E[aX+b] = aE[X]+b$$

$$\left.\begin{aligned} Var[W'] &= Var[W] = \frac{1-p}{p^2} \\ Var[Z'] &= Var[Z] = \frac{n(1-p)}{p^2} \end{aligned}\right\} \text{γιατί } Var[aX+b] = a^2 Var[X]$$

② Δειγματοληψία από πληθυσμό για μελέτη χαρακτηριστικών



Κάλπη με N σφαιρίδια

m άσπρα, $N-m$ μαύρα

Επιλέγω n

X = # άσπρων σφαιριδίων

1η περίπτωση: Δειγματοληψία με επανάθεση

Τότε το μοντέλο είναι ισοδύναμο με παρατήρηση

$X_1, X_2, \dots, X_n \quad P(X_i = 1) = \frac{m}{N} = p$ = ποσοστό άσπρων

$P(X_i = 0) = \frac{N-m}{N} = 1-p$ = ποσοστό μαύρων

$X \sim Bin(n, \frac{m}{N})$

2η περίπτωση: Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση

$P(X=i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad i=0,1,\dots,n \qquad X \sim$ Υπεργεωμετρική Hypergeom(n,N,m)

Η $E[X]$ και η $Var[X]$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας του λήμμα του Cauchy: $\binom{r+s}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{r}{i}\binom{s}{n-i}$.

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1.$$

$\binom{m}{i} = \frac{m}{i}\binom{m-1}{i-1}$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i\,P(X=i) = \sum_{i=0}^{n}\frac{i\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \frac{m}{\binom{N}{n}}\sum_{i=1}^{n}\binom{m-1}{i-1}\binom{N-m}{n-i} =$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}}\sum_{i=1}^{n}\binom{m-1}{\underbrace{i-1}_{j}}\binom{N-m}{n-i} = \frac{m}{\binom{N}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j} =$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{m-1+N-m}{n-1} = \frac{m\binom{N-1}{n-1}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} = \frac{n \cdot m}{N}$$

Πληθυσμός με N άτομα

m έχουν το χαρακτηριστικό

$N-m$ δεν έχουν το χαρακτηριστικό

$p = \frac{m}{N}$: ποσοστό ατόμων που έχουν το χαρακτηριστικό

Τυχαίο Πείραμα: Επιλογή n ατόμων $\rightarrow$ με επανάθεση / $\rightarrow$ χωρίς επανάθεση

X = # ατόμων που έχουν το χαρακτηριστικό

Με επανάθεση	Χωρίς επανάθεση
$X \sim Bin(n,p)$	$H \sim Hypergeom(n, N, m)$
$E[X] = np$	$E[X] = np$
$Var[X] = np(1-p)$	$Var[X] = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$

③ Άσκηση: Δίνεται η διακριτή τ.μ. X με σ.π. $p(x) = c(1+x)$, $x = 1, 2, \dots, 10$

1. $c = ;$
2. $E[X] = ;$
3. $Var[X] = ;$

$$\sum_x p(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{10} c(1+x) = 1 \Rightarrow c\sum_{x=1}^{10}(1+x) = 1 \Rightarrow c\left(10 + \sum_{x=1}^{10} x\right) = 1$$

$$\Rightarrow c\left(10 + \frac{10 \cdot 11}{2}\right) = 1 \Rightarrow c \cdot 65 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{65}$$

$$E[X] = \sum_x x\,p(x) = \frac{1}{65}\sum_{x=1}^{10}(x + x^2) = \frac{1}{65}\left(\sum_{x=1}^{10} x + \sum_{x=1}^{10} x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{65}\left(\frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6}\right)$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \dots$$

Χρήσιμα Αθροίσματα

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

④ Άσκηση: Εταιρεία κατασκ. λαμπτήρων P(ελαττ. λαμπτ.) = 1%

Ομαδική συσκευασία 10 λαμπτ.

Εγγύηση ότι το πολύ 1 λαμπτ. ελαττ/πακέτο

Ποσοστό πακέτων που θα αντικατασταθούν;

$\Updownarrow$

Πιθανότητα 1 πακέτο να αντικατασταθεί

$\Updownarrow$

Πιθανότητα 1 πακέτο να περιέχει ≥ 2 ελαττ. λαμπτ.

$\Updownarrow$

Πιθανότητα 1 πακέτο να περιέχει το πολύ 8 καλούς λαμπτ.

Λύση: Πείραμα Τύχης: Εξέταση των 10 λαμπτήρων του πακέτου

Επιτυχία: Λειτουργία λαμπτ.

$X = \#$ καλών λαμπτήρων $\sim Bin(10, 0.99)$

$P_{βλητ} = P(X \leq 8) = \sum_{i=0}^{8} \binom{10}{i} 0.99^{i}\, 0.01^{10-i} = 1 - P(X \geq 9) =$

$= 1 - P(X=9) - P(X=10) = 1 - \binom{10}{9} 0.99^{9} \cdot 0.01^{1} - \binom{10}{10} 0.99^{10} \cdot 0.01^{0}$

⑤ Άσκηση: 2 Αεροπλάνα

Αεροπλ. A → Δικινητ.

-||- B → Τετρακινητ.

Όλοι οι κινητήρες είναι του ίδιου τύπου και λειτ. ανεξάρτητα

P(κινητήρας βλάβη στην πτήση) = p

Αεροπλάνο δεν έχει προβλ. πτήση ⟺ κατά τη διάρκεια της πτήσης λειτουργούν χωρίς βλάβη τουλ. οι μισοί κινητήρες του.

Για ποιες τιμές του p

P(όχι προβλ. πτήση στο A) > P(όχι προβλ. πτήση στο B) ;

$Bin(2, 1-p) \sim X_A = \#$ κιν του A που δεν παρουσιάζουν πρόβλημα

$Bin(4, 1-p) \sim X_B = \#$ -||- B -||-

$p = ;\quad P(X_A \geq 1) > P(X_B \geq 2)$

$P(X_A = 1) + P(X_A = 2) > P(X_B = 2) + P(X_B = 3) + P(X_B = 4)$

$\binom{2}{1}(1-p)^1 p^1 + \binom{2}{2}(1-p)^2 p^0 > \binom{4}{2}(1-p)^2 p^2 + \binom{4}{3}(1-p)^3 p^1 + \binom{4}{4}(1-p)^4 p^0$

...

Για κάποιες τιμές του p είναι πιο αξιόπιστο το A και για κάποιες άλλες τιμές του είναι πιο αξιόπιστο το B.