19.04.10 19° μάθημα

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

① Έννοια

Συνεχής τ.μ. $\overset{\text{Διαισθ.}}{\longleftrightarrow}$ Συνεχές χαρακτηριστικό τυχ. πειρ.

$\updownarrow$ Μαθημ.

X (απόλυτα) συνεχής $\Rightarrow \exists f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ώστε $P(x \in B) = \int_B f(x)\,dx$

↳ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

② Ιδιότητες της σ.π.π.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$

3. $P(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{συνεχής}}}{X} = x) = \int_x^x f(u)\,du = 0$

4. Η $f(x)$ δεν είναι άνω φραγμένη από το 1 γενικά

5. Σχέση σ.κ. και σ.π.π.

$F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ (όπου $F(x)$ παραγ.)

6. X συν. τ.μ. $P(x \le X \le x+dx) = \int_x^{x+dx} f(u)\,du \overset{f \text{ συνεχής}}{\simeq} f(x)\,dx$, για $dx \to 0$

π.χ.

$f(5) = 3$: $P(5 \le X \le 5.01) \simeq 3 \cdot 0.01 = 0.03$

③ Μέση Τιμή - Διασπορά - Τυπική Απόκλιση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$ και σ.κ. $F(x)$

$$E[X] \overset{ορσ}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$SD[X] = \sqrt{Var[X]}$$

Ιδιότητες:

1. $E[aX+b] = aE[X]+b$
2. $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$
3. $SD[aX+b] = |a| SD[X]$
4. $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

Ισχύουν για όλων των τύπων της τ.μ.

5. $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$

④ Εναλλακτικός υπολογισμός Μέσης Τιμής μη-αρνητικής τ.μ.

$X \geq 0$
X σ.κ. $F(x)$ $\Rightarrow$ $E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx$

Απόδειξη: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \overset{X\geq 0}{=} \int_0^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^x du\right) f(x)\, dx$ $\quad 0 \leq u \leq x < \infty$

$$= \int_0^{\infty} \int_u^{\infty} f(x)\, dx\, du = \int_0^{\infty} \underbrace{P(X>u)}_{1-F(u)}\, du$$

⑤ Άσκηση: X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} c(4x-2x^2), & 0<x<2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

1. $c = ;$
2. $P(X>1) = ;$
3. $E[X] = ;$
4. $Var[X] = ;$
5. $F(x) = ;$

Λύση: 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^2 (4x-2x^2)dx = 1 \Leftrightarrow c\left[\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 1$

$$\Leftrightarrow c\left(\frac{4\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot 8}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{8}$$

2. $P(X>1) = P(X\in(1,\infty)) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx =$

$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \ldots = \frac{1}{2}$$

5. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x \frac{3}{8}(4u-2u^2)du, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{3}{8}\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right), & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

3. $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\,\frac{3}{8}(4x-2x^2)dx = \frac{3}{8}\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^2 = \ldots$

4. $E[X^2] = \int_0^2 x^2\,\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx = \ldots$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

⑥ άσκηση: X: χρόνος ζωής λαμπτήρα σε ώρες,
συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

1. P(ένας λαμπτήρας να ζήσει το πολύ 100 ώρες)
2. Σε ένα πολύφωτο υπάρχουν 6 τέτοιοι λαμπτήρες. Μετά από 100 ώρες λειτουργίας να βρεθούν: P(υπάρχουν ακριβώς 2 καμμένοι λαμπτήρες)
Μέσο πλήθος καμμένων λαμπτήρων

λύση: 1. $P_{ζητ.} = P(X \le 100) = \int_{-\infty}^{100} f(x)dx = \lambda \int_0^{100} e^{-\frac{x}{100}} dx = \lambda \left[-100e^{-\frac{x}{100}}\right]_0^{100} =$

$= \lambda(-100e^{-1}+100) = 100\lambda(1-e^{-1})$

$\lambda = ;\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \lambda e^{-\frac{x}{100}} dx = \lambda \cdot 100 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

Άρα $P_{ζητ} = P(\text{χρόνος ζωής λαμπτήρα} \le 100 \text{ ώρες}) = (1-e^{-1})$

2. Πείραμα: Εξέταση 6 λαμπτήρων μετά από 100 ώρες

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$

$X_i = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } i \text{ λαμπτήρας λειτουργεί} \leftarrow \text{αποτ.} \\ 1, & \text{αν ο } i \text{ λαμπτήρας δεν λειτουργεί} \leftarrow \text{επιτ.} \end{cases}$

$Y = \#\text{καμ. λαμπτ.} \sim Bin(6, 1-e^{-1})$

$P(\text{υπάρχουν 2 καμ. μετά από 100 ώρες}) = P(Y=2) = \binom{6}{2}(1-e^{-1})^2(e^{-1})^4$

$\left(Bin(n,p): P(Y=i) = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\right)$

Μέσο πλήθος καμ. $\underset{np}{=} 6(1-e^{-1})$

⑦ άσκηση: X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0<x<\frac{1}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ Είναι σ.π.π;

1. $f(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}$ ✓
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$\int_0^{1/2} 2dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ✓ ΝΑΙ

⑧ άσκηση: X συνεχής με σ.κ. $F_X(x)$ και σ.π.π. $f_X(x)$

$Y = aX + b$

$F_Y(y) = ;$

$f_Y(y) = ;$

λύση: $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P(aX \le y-b) =$

$$= \begin{cases} P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases} = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d F_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

⑨ άσκηση: X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$Y = e^X$

$F_Y(y) = ;$

$f_Y(y) = ;$

$E[Y] = ;$

Υπόδειξη: $E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy$

$= \int_0^{\infty} (1 - F_Y(y))\, dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)\, dx$