21.04.10 20° μάθημα

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

① Γραμμική Συνάρτηση τ.μ.

X συνεχής τ.μ. με σ.κ. $F_X(x)$

σπη $f_X(x)$

$E[X]$

$Var[X]$

$Y = aX + b$, τότε
$a \neq 0$

σ.κ. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX+b) \leq y \overset{a>0}{=} P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

σπη

$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ $\qquad \overset{a<0}{=} P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$E[Y] = aE[X] + b$

$Var[Y] = a^2 Var[X]$

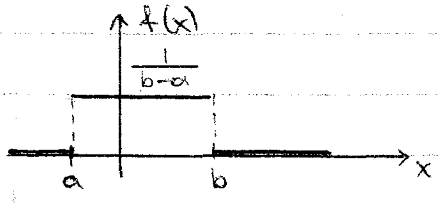
② Ομοιόμορφη Κατανομή (Uniform([a,b]))

$$f(x) = \begin{cases} \overset{\to \frac{1}{b-a}}{c} & , x \in [a,b] \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases}$$

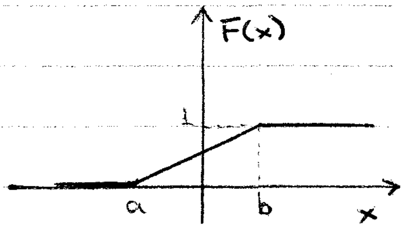
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_a^b c\,dx = 1 \Rightarrow c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

Τυχαίο πείραμα: Τυχαία Επιλογή σημείου στο $[a,b]$

$X \sim$ Uniform$([a,b])$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}du = \frac{x-a}{b-a} & , a < x < b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$$



Ιδιότητα

$X \sim \text{Uniform}([0,1]) \Rightarrow (b-a)X + a \sim \text{Uniform}([a,b])$

$Y = (b-a)X + a$

Απόδειξη: $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{b-a} f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot 1, & \frac{y-a}{b-a} \in [0,1] \\ \frac{1}{b-a} \cdot 0, & \frac{y-a}{b-a} \notin [0,1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le y \le b \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μέση Τιμή - Διασπορά κλπ

$Y \sim \text{Uniform}([a,b])$

$$E[Y^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f(y)\,dy = \int_a^b \frac{1}{b-a} y^n\,dy = \frac{1}{b-a}\int_a^b y^n\,dy =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$$

Άρα $E[Y] = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

③ Εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$

Τυχαίο Πείραμα : Χρόνος Ζωής με σταθερό ρυθμό θανάτου λ.

Να ορίσω: $X \sim Exp(\lambda)$

Πρέπει $X \geq 0$ και $\lim_{dt \to 0^+} \frac{P(t < X \le t + dt \mid X > t)}{dt} = \lambda$, $t \geq 0$

$= \lambda(t)$

Ρυθμός βλάβης / θανάτου

failure / mortality rate

$$\lim_{dt \to 0^+} \frac{P(t < X \le t + dt)}{dt\, P(X > t)} = \lambda \quad , \quad t \geq 0$$

$$\frac{\overset{\swarrow \text{σππ}}{f_X(t)}}{\underset{\nwarrow \text{σ.κ.}}{1 - F_X(t)}} = \lambda, \quad t \geq 0$$

Έστω $g(t) = 1 - F_X(t)$. Τότε $g'(t) = -f_X(t)$.

Άρα πρέπει να βρω $g(t)$ ώστε

$$-\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda \Leftrightarrow (\log g(t))' = -\lambda \Leftrightarrow \log g(t) = -\lambda t + c$$

$$\Leftrightarrow g(t) = c e^{-\lambda t}$$

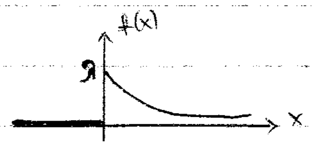
Επειδή $g(0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1$ πρέπει $c = 1$.

Άρα για να μοντελοποιήσω χρόνο ζωής με σταθερό ρυθμό θανάτου λ πρέπει
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

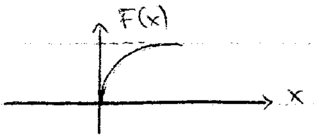
και
$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$X \sim Exp(\lambda)$

σ.π.π $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



σ.κ. $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} x^n (-e^{-\lambda x})'\,dx =$$

$$= \overset{\nearrow 0}{\left[-x^n e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}} + \int_0^{\infty} n x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{\infty} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]$$

$$E[X^n] = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}] = \frac{n}{\lambda}\cdot\frac{(n-1)}{\lambda}\cdots\frac{1}{\lambda} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Άρα $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Ιδιότητα

$X \sim Exp(\lambda) \overset{a>0}{\Rightarrow} aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

Απόδειξη

$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

$Y = aX$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{a}\right) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{\lambda y}{a}}, & y \geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$

Αμνήμονη Ιδιότητα Εκθετικής

Αν $X \sim Exp(\lambda)$ τότε $P(X>s+t \mid X>t) = P(X>s)$, $s,t>0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{P(X-t>s \mid X>t)}$

Απόδειξη : $P(X>s+t \mid X>t) = \frac{P(X>s+t,\, X>t)}{P(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X>s)$

Ισχύει και το αντίστροφο : Αν X τ.μ. με $P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$
$s,t>0$, τότε $X \sim Exp(\lambda)$ για κάποιο λ
(Υπόδειξη Απόδειξης: $g(t) = P(X>t)$
Αμνημ.⇒ $g(t+s) = g(t)g(s)$)

④ Η κατανομή Γάμμα (Gamma (a,λ))

$X \sim Gamma(a,\lambda)$ ⟷ Χρόνος ζωής

σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ με $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$

(Γενικά η $\Gamma(a)$ γενικεύει το παραγοντικό $n \in \{1,2,\dots\}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$
$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$)

Για $a=1$ Έχω την Εκθετική

Για $a = n \in \{1,2,3,\dots\}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ έχω την Erlang(n,λ)

$E[X] = \frac{a}{\lambda}$

$Var[X] = \frac{a}{\lambda^2}$

$X \sim$ Gamma (a,λ)

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^{n+a}} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+a}}{\Gamma(n+a)} x^{n+a-1} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^n \Gamma(a)} = \frac{(n+a-1)\Gamma(n+a-1)}{\lambda^n \Gamma(a)} = \dots = \frac{(n+a-1)(n+a-2)\dots a\, \cancel{\Gamma(a)}}{\lambda^n \cancel{\Gamma(a)}}$$

Όμως $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{a-1} (-e^{-x})' dx =$

$$= \cancel{\left[-x^{a-1} e^{-x}\right]_0^\infty}^{\to 0} + \int_0^\infty (a-1) x^{a-2} e^{-x} dx =$$

$$= (a-1)\Gamma(a-1)$$

$E[X] = \frac{1+a-1}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}$

$E[X^2] = \frac{(a+1)a}{\lambda^2}$

άρα

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{(a+1)a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$