23.04.10 21° μάθημα

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

① Η κανονική κατανομή ($N(\mu, \sigma^2)$)

Τυχαίο Πείραμα: Μετρήσεις που προκύπτουν ως $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, n μεγάλο
X_i ανεξάρτητη ίδια κατανομή

$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y$ συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, y \in \mathbb{R}$

Είναι πράγματι σ.π.π.;

1. Πρέπει $f_Y(y) > 0, y \in \mathbb{R}$ ✓
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$

Έχουμε $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \underset{\frac{y-\mu}{\sigma} = x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Αρκεί νδο $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

$(I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy =$

$\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \right) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr\,d\theta =$

$= \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} d\theta = 2\pi)$

② Ιδιότητα (Γραμμική Συνάρτηση)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Y = aX + b, a \neq 0 \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Γενικά αν X συνεχής: $Y = aX + b \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) : \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$Y = aX + b : \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

③ Πόρισμα

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \underset{\text{τυποποίηση της } X}{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \underbrace{N(0,1)}_{\text{τυποποιημένη κανονική}}$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

④ Η τυποποιημένη κανονική

$$Z \sim N(0,1) \quad \text{σ.π.π.} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{σ.κ.} \quad \Phi(x) = P(Z \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$Var[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x)' e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\sqrt{2\pi}}\right) = 1$$

Άρα
$E[Z] = 0$
$Var[Z] = 1$

⑤ Μέση Τιμή και Διασπορά $N(\mu,\sigma^2)$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{άρα} \quad E[X] = \sigma \overset{0}{E[Z]} + \mu = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2 \overset{1}{Var[Z]} = \sigma^2$$

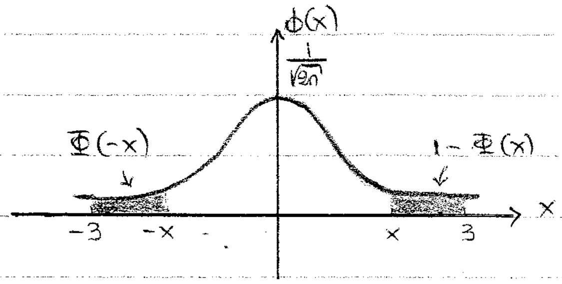
⑥ Υπολογισμοί Πιθανοτ. - Μέσων Τιμών κτλ. με $N(\mu, \sigma^2)$

$$X \sim N(\underset{\substack{\uparrow \\ E[X]}}{\mu}, \underset{\substack{\nwarrow \\ Var[X]}}{\sigma^2}) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$E[Z] = 0$

$Var[Z] = 1$

σ.π.π. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$



σ.κ. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Ιδιότητα: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

⑦ Άσκηση : $X \sim N(\underset{\mu}{3}, \underset{\sigma^2}{9}) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3}{3} \sim N(0,1)$

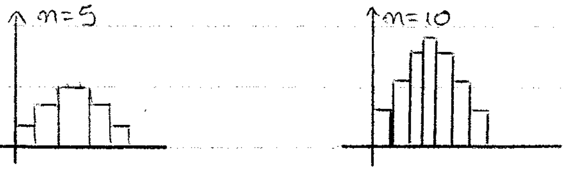
1. $E[X] = 3$
2. $Var[X] = 9$
3. $P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) =$ ③
4. $P(X = 5) = 0$
5. $P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = P(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) = 0.841$
6. $P(|X-3| > 6) = P\left(\left|\frac{X-3}{3}\right| > \frac{6}{3}\right) = P(|Z| > 2) = P(Z > 2) + P(Z < -2) =$ ⑥

③ $\Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3779$

⑥ $1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 2 - 2\Phi(2) = 0.0456$

⑧ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα του De Moivre (1733) - Laplace (1812)

De Moivre : Προσεγγίσεις της $\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$



$Bin(n, \frac{1}{2}) \simeq N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$ n μεγάλο

Laplace: $Bin(n,p) \simeq N(np, np(1-p))$, $n \to \infty$

Θεώρημα De Moivre-Laplace

Αν $S_n = Bin(n,p)$ τότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\alpha \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$

(9) Άσκηση: Νόμισμα $\to$ K $\overset{\text{πιθ}}{1/2}$, Γ $1/2$, 40 ρίψεις

$X = \#K \sim Bin(40, \frac{1}{2})$

$P(X=20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} = 0.1254$ ακριβής λύση

$P(X=20) \underset{\uparrow}{=} P(19.5 < X < 20.5) = P\left(\frac{19.5-20}{\sqrt{10}} < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < \frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\right) =$

"διόρθωση συνέχειας"

$\overset{\text{ΚΟΘ}}{=} \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right) = 0.1272$