28.04.10 23° μάθημα

Ανεξάρτητες τ.μ.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

① Δεσμευμένες σ.π. και σ.π.π.

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

Ορίζουμε για κάθε y σταθ. με $P_Y(y) > 0$

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}, \quad \forall x$$

δεσμευμένη σ.π. της X δοθέντος $Y=y$

Έχουμε $P_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\forall x$

$$\sum_x P_{X|Y}(x|y) = 1$$

X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow P_{X|Y}(x|y) = P_X(x) \quad \forall x, y$

$\Leftrightarrow P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\, P_Y(y) \quad \forall x, y$

$\Leftrightarrow P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y) \quad \forall x, y$

Γενικότερα: X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$

Όμοια: (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

Ορίζουμε για κάθε y σταθ με $f_Y(y) > 0$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \forall x$$

δεσμευμένη σ.π.π. της X δοθέντος $Y = y$

Έχουμε $f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \forall x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$$

X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad \forall x,y$

$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x,y$

$\Leftrightarrow f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \quad \forall x,y$

Γενικότερα : X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$

② Δεσμευμένη σ.κ.

(X, Y) διακριτή ή συνεχής : $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x \mid Y = y) = \begin{cases} \sum_{u \leq x} P_{X|Y}(u|y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$

σ.κ. της X δοθέντος $Y = y$.

③ Χαρακτηρισμός ανεξαρτησίας

X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \quad , \forall x,y$

$\overset{\text{διακριτές}}{\Leftrightarrow} P_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y) \quad , \forall x,y$

$\overset{\text{συνεχείς}}{\Leftrightarrow} f_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y) \quad , \forall x,y$

④ Άσκηση: (X,Y) διακριτή

$P((X,Y) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}) = 1$

x \ y	0	1	$P_X(x)$
0	0.4	0.2	0.6
1	0.1	0.3	0.4
$P_Y(y)$	0.5	0.5	1

1. $P_X(x) = ;$
2. $P_Y(y) = ;$
3. $P_{X|Y}(x|y) = ;$
4. X,Y ανεξάρτητες ;

3. $P_{X|Y}(x|y) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$

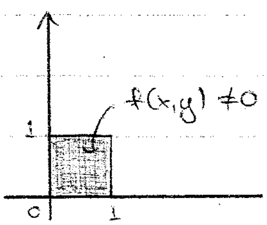
$y=0$: $P_{X|Y}(x|0) = \dfrac{P_{X,Y}(x,0)}{P_Y(0)} = \begin{cases} \frac{0.4}{0.5} = 0.8, & x=0 \\ \frac{0.1}{0.5} = 0.2, & x=1 \end{cases}$

$y=1$: $P_{X|Y}(x|1) = \dfrac{P_{X,Y}(x,1)}{P_Y(1)} = \begin{cases} \frac{0.2}{0.5} = 0.4, & x=0 \\ \frac{0.3}{0.5} = 0.6, & x=1 \end{cases}$

4. X,Y δεν είναι (γενικότερα) ανεξάρτητες, γιατί θα έπρεπε $P_{X|X}(x|0) = P_{X|X}(x|1)$
ή γιατί θα έπρεπε $P_X(x)P_Y(y) = P_{X,Y}(x,y)$ π.χ. $0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \neq 0.4$ (= 1ο στοιχείο)

⑤ Άσκηση: (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

1. $f_X(x) = ;$
2. $f_Y(y) = ;$
3. $f_{X|Y}(x|y) = ;$
4. $f_{Y|X}(y|x) = ;$
5. X,Y ανεξάρτητες ;



X, Y ανεξάρτητες $\overset{\text{συνεχής}}{\Leftrightarrow}$ $f_{X,Y}(x,y) = \underset{\underset{cx 1_{(0,1)}(x)}{\parallel}}{g(x)}\, h(y) = y\, 1_{(0,1)}(y)$ άρα X, Y ανεξάρτητες

$f_{X,Y}(x,y) = cxy \cdot 1_{(0,1)}(x) \cdot 1_{(0,1)}(y)$ ή $cxy \cdot 1 \cdot \{0<x<1\}\, 1\, \{0<y<1\}$

$I_A(x) = \chi_A(x) = 1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

δείκτρια

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^1 cxy\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2}\int_0^1 x\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow c = 4$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy = 4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2x \quad , 0<x<1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = 2x\, 1_{(0,1)}(x)$$

Αντίστοιχα, λόγω συμμετρίας $f_Y(y) = 2y\, 1_{(0,1)}(y)$

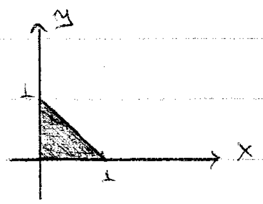
Για κάθε y με $f_Y(y) > 0$ δηλ. $y \in (0,1)$ ορίζεται

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(x,y)} = \frac{\cancel{2}4xy\, 1_{(0,1)}(x)\, 1_{(0,1)}(y)}{2y\, 1_{(0,1)}(y)} = 2x\, 1_{(0,1)}(x)$$

Αντίστοιχα, λόγω συμμετρίας $f_{Y|X}(y|x) = 2y\, 1_{(0,1)}(y)$

7 Άσκηση: (X, Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \\ 0<x+y<1 \end{matrix} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

1. c = ;
2. $f_X(x)$ = ;
3. $f_Y(y)$ = ;
4. $f_{X|Y}(x|y)$ = ;
5. $f_{Y|X}(y|x)$ = ;
6. X, Y ανεξάρτητες ;



$f_{X,Y}(x,y) = cxy\, 1_{(0,1)}(x)\, 1_{(0,1)}(y)\, 1_{(0,1)}(x+y)$

X, Y όχι ανεξάρτητες γιατί για $x=y=2/3$
$f_{X,Y}(x,y) = 0 \neq f_X(x) f_Y(y) \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} cxy\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^1 x \int_0^{1-x} y\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^1 x\,\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow c = 24$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = \frac{24x(1-x)^2}{2} = 12x(1-x)^2, \quad 0<x<1$$

$f_X(x) = 12x(1-x)^2\, 1_{(0,1)}(x)$

Αντίστοιχα, λόγω συμμετρίας $f_Y(y) = 12y(1-y)^2\, 1_{(0,1)}(y)$, $0<y<1$

Για κάθε $y \in (0,1)$ ορίζεται η $f_{X|Y}(x|y)$, $x \in \mathbb{R}$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{24xy}{12y(1-y)^2} = \frac{2x}{(1-y)^2}, \quad 0<x<1-y$$

Αντίστοιχα, λόγω συμμετρίας $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{2y}{(1-x)^2}$, $0<y<1-x$