30.04.10 24ο μάθημα

Δεσμευμένες Κατανομές
Ανεξάρτητες τ.μ.
Αθροίσματα τ.μ.

① Γενίκευση
$(X_1, X_2, \dots, X_n) \leftarrow$ n-διάστατη τ.μ.

$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$, $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ από κοινού σ.κ.
Ανάλογα ορίζονται περιθώριες σ.π., σ.π.π., δεσμευμένη κλπ.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ $\Leftrightarrow P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$ $\forall A_1, A_2, \dots, A_n$

② Άθροισμα Διακριτών τ.μ.

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$
$Z = X+Y$
$P_Z(z) = P(Z=z) = P(X+Y=z) \overset{\text{εοπ}}{=} \sum_x P(X=x) P(X+Y=z \mid X=x) = \sum_x P(X=x, X+Y=z) =$

$= \sum_x P(X=x, Y=z-x) = \sum_x P_{X,Y}(x, z-x)$

Άρα $P_Z(z) = \sum_x P_{X,Y}(x,z-x)$ για διακριτές

③ Άθροισμα Συνεχών τ.μ.

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$
$Z = X+Y$
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx$ για συνεχείς

④ Παράδειγμα: $X \sim \text{Uniform}([0,1])$
$Y \sim \text{Uniform}([0,1])$ ανεξαρτ.

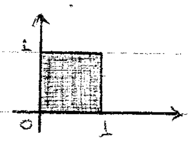
$Z = X + Y$

$f_Z(z) = \;;$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

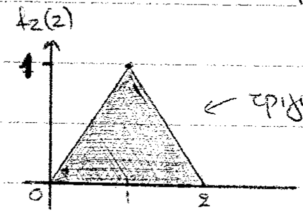
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1 \cdot dx = \min(1,z) - \max(0,z-1) = \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1 \\ 2-z, & 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &0 \le x \le 1 \\ &0 \le z-x \le 1 \\ &\Updownarrow \\ &0 \le x \le 1 \\ &z-1 \le x \le z \end{aligned} \iff \max(0, z-1) \le x \le \min(1,z)$$



⑤ Παράδειγμα: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
$Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ ανεξαρτ.

$Z = X + Y$

$P(z) = \;;$

$P_{X|Z}(x|z) = P(X = x \mid Z = z) = \;;$

$$\text{Poisson}(\lambda) \simeq \text{Bin}\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$$

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$P_Y(y) = e^{-\mu} \frac{\mu^y}{y!}, \quad y = 0,1,2$$

$\Downarrow$ X, Y ανεξαρτ.

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$$

$$P_Z(z) = \sum_{\substack{x \ge 0,\, x \in \mathbb{Z} \\ z-x \ge 0,\, z-x \in \mathbb{Z}}} P_{X,Y}(x, z-x) = \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{1}{x!(z-x)!} \lambda^x \mu^{z-x} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \lambda^x \mu^{z-x} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}, \quad z = 0,1,2,\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Poisson(\lambda) \\ Y \sim Poisson(\mu) \\ \text{ανεξάρτητες} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu) \\ \Rightarrow (X \mid X+Y=z) \sim Bin\left(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \end{array}$$

Για κάθε $z=0,1,2,\dots$ έχουμε μια δεσμευμένη σ.π. της X δοθέντος ότι $Z=z$

$x \in \{0,1,\dots,z\}$ $\quad P_{X|Z}(x|z) = \dfrac{P_{X,Z}(x,z)}{P_Z(z)} = \dfrac{P(X=x, Z=z)}{P_Z(z)} = \dfrac{P(X=x, Y=z-x)}{P_Z(z)} = \dfrac{P_X(x)\,P_Y(z-x)}{P_Z(z)} =$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^x}{x!}\, \cancel{e^{-\mu}} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \Rightarrow$$

⑥ Αναπαραγωγικές Ιδιότητες

X, Y ανεξάρτητες και ανήκουν στην ίδια οικογένεια κατανομών
$Z = X+Y$ ανήκει στην οικογένεια;

1. $X \sim Bernoulli(p)$, $Y \sim Bernoulli(p)$ $\Rightarrow X+Y \sim Bin(2,p)$
2. $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$ $\Rightarrow X+Y \sim Bin(n+m,p)$
3. $X \sim Geom(p)$, $Y \sim Geom(p)$ $\Rightarrow X+Y \sim NegBin(2,p)$
4. $X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p)$ $\Rightarrow X+Y \sim NegBin(n+m,p)$
5. $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ $\Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$
6. $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$ $\Rightarrow X+Y \sim Gamma(2,\lambda)$
7. $X \sim Gamma(a,\lambda)$, $Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$ $\Rightarrow X+Y \sim Gamma(a+\beta,\lambda)$
8. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

⑦ Παράδειγμα : $X \sim Gamma(a,\lambda)$
$Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$ ανεξαρτ.
$Z = X+Y$
$f_Z(z) = ;$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\lambda y}, \quad y>0$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx \overset{\substack{x>0\\ z-x>0}}{=} \int_0^z \frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda^{a+\beta}}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}}_{c} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{a-1} (z-x)^{\beta-1}\,dx \underset{\frac{x}{z}=u}{=} c\, e^{-\lambda z} \int_0^1 (uz)^{a-1} (z-uz)^{\beta-1}\,du =$$

$$= \underbrace{c\, e^{-\lambda z} z^{a+\beta-1} \underbrace{\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{\beta-1}\,du}_{c''}}\; = c'' z^{a+\beta-1} e^{-\lambda z}, \quad z>0 \Rightarrow$$

$$c' = \frac{\lambda^{a+\beta}}{\Gamma(a+\beta)} \Rightarrow Z \sim \text{Gamma}(a+\beta, \lambda)$$

Διότι

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{\infty} c\, z^{a+\beta-1} e^{-\lambda x}\,dx = 1 \\ \int_0^{\infty} c'' z^{a+\beta-1} e^{-\lambda x}\,dx = 1 \end{array}\right\} \text{πρέπει } c = c''$$