17.05.10 29° μάθημα

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

① Ορισμός

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$ δεσμευμένη σ.π. της X δοθέντος $Y=y$

$P_{X|Y}(x|y) \geq 0$

$\sum_x P_{X|Y}(x|y) = 1.$

Ορίζω $E[X \mid Y=y] = m_{X|Y}(y) = \sum_x x\, P_{X|Y}(x|y)$

Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθέντος $Y=y$

= αριθμός εξαρτάται από το y

Ομοίως για (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx$

② Ιδιότητες

Ισχύουν τα ίδια που αφορούν την $E[X]$

π.χ. $E[g(x) \mid Y=y] = \begin{cases} \sum_x g(x) P_{X|Y}(x|y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$

$E[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid Y=y] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid Y=y]$

$\cancel{E[X \mid Y_1+Y_2=y] = E[X \mid Y_1=y] + E[X \mid Y_2=y]}$ δεν ισχύει!

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2 \mid Y=y) = P(X_1=x_1 \mid Y=y)\, P(X_2=x_2 \mid Y=y)$$
$$\Downarrow$$
$$E[X_1X_2 \mid Y=y] = E[X_1 \mid Y=y]\, E[X_2 \mid Y=y]$$

③ Παράδειγμα: X, Y ανεξάρτητες $\sim Bin(n,p)$

$E[X \mid X+Y=m] = ;$

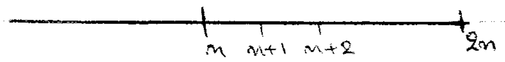
$$p_{X \mid X+Y}(x \mid m) = \frac{p_{X, X+Y}(x,m)}{p_{X+Y}(m)} = \frac{P(X=x, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} = \frac{P(X=x, Y=m-x)}{P(X+Y=m)} =$$

$$= \frac{P(X=x)P(Y=m-x)}{P(X+Y=m)} = \frac{\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}\binom{n}{m-x} p^{m-x}(1-p)^{n-m+x}}{\binom{2n}{m} p^{m}(1-p)^{2n-m}} \quad 0 \le x \le m$$

$$= \frac{\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}}, \quad 0 \le x \le m$$

$$E[X \mid X+Y=m] = \sum_{x=0}^{m} x \frac{\binom{n}{x}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} = \sum_{x=1}^{m} \frac{x\left(\frac{n}{x}\right)\binom{n-1}{x-1}\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}} =$$

$$\underset{y=x-1}{=} \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{y=0}^{m-1} \binom{n-1}{y}\binom{n}{m-1-y} = \frac{n\binom{2n-1}{m-1}}{\frac{2n}{m}\binom{2n-1}{m-1}} = \frac{m}{2}$$



$2n$ δοκιμές Bernoulli

X = # επιτυχιών στις n δοκιμές

Y = # επιτυχιών στις υπόλοιπες n δοκιμές

$X+Y=m$, m = # επιτυχιών στις $2n$ δοκιμές

④ Παράδειγμα: (X, Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}$, $x>0$, $y>0$

$E[X|Y=y] = ;$

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y) \, dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y} \, dx = e^{-y}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}, \quad x>0$$

$$\Rightarrow (X|Y=y) \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$E[X|Y=y] = y$$

$$E[X|Y=y] = \int_0^{\infty} x \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \, dx = y$$

⑤ Δεσμευμένη Μέση Τιμή ως προς τ.μ.

$$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x\, P_{X|Y}(x|y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

↑ αριθμός που εξαρτάται από το y

"Καλύτερη εκτίμηση της X αν ξέρω ότι $Y=y$"

Ορισμός: $E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$: Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης της Y

↑ τυχαία μεταβλητή

"Καλύτερη συνάρτηση της τ.μ. Y που προσεγγίζει τη X"

Στα παραδείγματα ③, ④ : $E[X|Z] = \frac{Z}{2}$, $(Z = X+Y)$, $E[X|Y] = Y$

⑥ Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[\underbrace{E[X|Y]}_{m_{X|Y}(Y)}] = \begin{cases} \sum_y P(Y=y)\,E[X|Y=y], & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,E[X|Y=y]\,dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

π.χ. σε πληθυσμό

$X =$ ύψος

$Y =$ βάρος

$X \in \{1.60,\ 1.70,\ 1.80\}$

	1.60	1.70	1.80
	30%	50%	20%
Y	60	70	80

$\rightsquigarrow E[Y] = \frac{30}{100}\cdot 60 + \frac{50}{100}\cdot 70 + \frac{20}{100}\cdot 80$

⑦ Παράδειγμα: Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη ζαριού

Ρίψη δίκαιου νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι

$X =$ # κορώνων

$E[X] =$;

λύση: $Y =$ ένδειξη ζαριού

$$E[X] = \sum_y P(Y=y)\,E[X|Y=y]$$

$$P[Y=y] = \frac{1}{6} \text{ για } y = 1, 2, \dots, 6$$

$$(X|Y=y) \sim Bin(y, 1/2)$$

$$E[X|Y=y] = y/2$$

$$E[X] = \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{6}\cdot\frac{y}{2} = \frac{1}{12}\sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{12}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

Μηχανικά: το ζάρι φέρνει $3.5 = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}$ νομίσματα

⑧ Παράδειγμα: Φυλακισμένος

3 πόρτες:
- $\Pi_1 \rightarrow$ Ελευθερία άμεση
- $\Pi_2 \rightarrow$ Πίσω στο κελί σε 1 μέρα
- $\Pi_3 \rightarrow$ Πίσω στο κελί σε 4 μέρες

X = # ημερών ως την ελευθερία

Όταν είναι στο κελί, διαλέγει πόρτα στα τυφλά

$E[X] = ;$

$P(X=0) = 1/3$

$P(X=1) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$

$P(X=2) = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 = 1/27$

$P(X=3) = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 = 1/81$

$P(X=4) = (1/3)^5 + 1/3 \cdot 1/3 = \ldots$

Y = αρχική επιλογή πόρτας

$E[X] = P(Y=1)\,E[X \mid Y=1] + P(Y=2)\,E[X \mid Y=2] + P(Y=3)\,E[X \mid Y=3] =$

$= 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot (1 + E[X]) + 1/3 \cdot (4 + E[X]) =$

$= 5/3 + 2/3\, E[X] \Rightarrow E[X] = 5$ μέρες

⑨ Μέση Τιμή - Διασπορά Γεωμετρικής Κατανομής

X = # δοκιμών Bernoulli μέχρι την 1η επιτυχία με πιθ. επιτ. p.

$P(X=x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots$

$E[X] = ;$

$Var[X] = ;$

λύση: Y = αποτέλεσμα $1^{ης}$ δοκιμής $= \begin{cases} 1, & \text{με πιθ } p \\ 0, & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$

$$E[X] = \underbrace{P(Y=1)}_{p} \underbrace{E[X|Y=1]}_{1} + \underbrace{P(Y=0)}_{1-p} \underbrace{E[X|Y=0]}_{1+E[X] = E[1+X]}$$

$$E[X] = p + (1-p)(1+E[X]) \Rightarrow p\,E[X] = 1 \Rightarrow E[X] = 1/p$$

$$E[X^2] = \underbrace{P(Y=1)}_{p} \underbrace{E[X^2|Y=1]}_{1} + \underbrace{P(Y=0)}_{1-p} \underbrace{E[X^2|Y=0]}_{E[(1+X)^2]}$$

$$= p + (1-p)\,E[1+2X+X^2] = 1 + 2(1-p)E[X] + (1-p)E[X^2]$$

οπότε

$$p\,E[X^2] = 1 + 2(1-p)E[X] = 1 + 2(1-p)\cdot\frac{1}{p}$$

ή

$$E[X^2] = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$