21.05.10 30° μάθημα

Δεσμευμένη Μέση Τιμή - Πιθανογεννήτριες

① Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \begin{cases} \sum_y P(Y=y)\, E[X|Y=y], & Y \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(Y=y)\, E[X|Y=y]\,dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

② Παράδειγμα

Οι A, B μονομαχούν ρίχνοντας διαδοχικά μέχρι να χτυπηθεί κάποιος

πιθανότητα ευστοχίας $A = 1/10$

πιθανότητα ευστοχίας $B = 1/5$

ο A ρίχνει πρώτος

P(κερδίζει ο A) = ; Θ.Ο.Π.

E(βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος) = ; Θ. Διπλής Μ.Τ.

Λύση: E: κερδίζει ο A

F: ευστοχεί ο A στην 1η βολή

$$P(E) = \underbrace{P(F)}_{1/10}\,\underbrace{P(E|F)}_{1} + \underbrace{P(F^c)}_{9/10}\,\underbrace{P(E|F^c)}_{P(E')} \quad \circledast$$

E': κερδίζει ο A σε μονομαχία που ξεκινάει ο B

$$P(E') = \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{4}{5}\cdot P(E) \quad \circledast\circledast$$

$\circledast$ και $\circledast\circledast$ $\Rightarrow P(E) = 1/10 + \frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5} P(E) \Rightarrow P(E) = \ldots$

X = αριθμός βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος στη μονομαχία

$$\begin{pmatrix} A \to 1/10 & \text{ο A ρίχνει πρώτος} \\ B \to 1/5 & \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{αν ο A ευστοχεί στην } 1^{\eta} \text{ βολή} \\ 0, & \text{αν ο A δεν ευστοχεί στην } 1^{\eta} \text{ βολή} \end{cases}$$

$$E[X] = \underbrace{P(Z=1)}_{1/10} \underbrace{E[X|Z=1]}_{1} + \underbrace{P(Z=0)}_{9/10} \underbrace{E[X|Z=0]}_{1+E[X']} \quad (*)$$

X' = αριθμός βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος

$\left(\begin{matrix} A \to 1/10 & \text{ο B ρίχνει πρώτος} \\ B \to 1/5 & \end{matrix}\right)$

$$E[X'] = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5}(1 + E[X]) \quad (**)$$

$(*)$ και $(**)$ $\Rightarrow$ $E[X] = \ldots$

$E[X'] = \ldots$

③ Παράδειγμα

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξ και ισονομ τ.μ. με μέση τιμή $E[X]$

N ακέραια μη-αρνητ. τ.μ ανεξ των X_i

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$E[S_N] = ;$

$\cancel{E[X_1 + X_2 + \ldots + X_N] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_N] = N\,E[X]}$ πολύ λάθος

$$E[S_N] = E[E[S_N|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[S_N|N=n]$$

$$E[S_N|N=n] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\,E[X]$$

Άρα $E[S_N] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, n\, E[X] = E[N]\,E[X]$

$\cancel{Var[S_N] = Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\,Var[X] \text{ ή } N\,Var[X]}$ ← λάθος

④ Πιθανογεννήτριες - Ορισμός

X ακέραια μη-αρνητική τ.μ. με σ.π. $p_X(n) = P(X=n)$, $n=0,1,2,\dots$

Πιθανογεννήτρια της X : $P_X(z) = E[\underbrace{z^X}_{g(X)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=n)}_{a_n} z^n$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} z^n$

⑤ Ιδιότητες

1. $P(X=n) = \frac{P_X^{n}(0)}{n!}$, $n=0,1,2,\dots$

2. X, Y ισόνομες $\Leftrightarrow$ $P_X(z) = P_Y(z)$

3. $\left.\begin{matrix} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξ} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) \dots P_{X_n}(z)$

Απόδειξη:

$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1+X_2+\dots+X_n}] = E[\overbrace{z^{X_1} z^{X_2} \dots z^{X_n}}^{\text{ανεξ}}] =$

$= E[z^{X_1}] \dots E[z^{X_n}] = P_{X_1}(z) \dots P_{X_n}(z)$

4. $\left.\begin{matrix} X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ και ισόνομες} \\ N \text{ ανεξ και } X_i \text{ ακερ} \geq 0 \\ S_N = \sum_{i=0}^{N} X_i \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

Απόδειξη:

$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E[z^{S_N} | N=n]$

Όμως $E[z^{S_N} | N=n] = E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} | N=n] = E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}] = P_X(z)^n$

άρα $P_{S_N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, P_X(z)^n = P_N(P_X(z))$

⑥ Παράδειγμα : Γενικά $P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$

1. $X \sim$ Bernoulli (p)

$$X = \begin{cases} 1 & \text{με πιθ } p \\ 0 & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$$P_X(z) = (1-p)z^0 + p\cdot z^1 = 1-p+pz$$

2. $X \sim Bin(n,p)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \text{με} \quad I_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθ } p \\ 0 & \text{με πιθ } 1-p \end{cases} \text{ ανεξ}$$

$$P_X(z) = (pz+1-p)^n$$

3. $X \sim Geom(p)$

$$P(X=n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$P_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} z^n = pz \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)z]^{n-1} = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

4. $X \sim NegBin(n,p)$

$$P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$$

5. $X \sim$ Poisson (λ)

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

⑦ Παράδειγμα

N = # των ασθενών που φθάνουν σε εφημερία νοσοκομείου

$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο ασθενής εισαχ. στο νοσοκομείο} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$P(X_i = 1) = p$

Τι κατανομή ακολουθεί το S_N ;

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ = # ασθενών που εισάγονται στο νοσοκομείο

Έχουμε $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

$P_X(z) = 1 - p + pz$

Άρα από Ιδιότητα 4: $P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z)) = P_N(1-p+pz) = e^{-\lambda(1-1+p-pz)} = e^{-\lambda p(1-z)}$

Άρα $S_N \sim \text{Poisson}(\lambda p)$