31.05.10 33° μάθημα

Ασκήσεις

① ΚΟΘ

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισον (=τυχαίο δείγμα)

με $E[X_i] = \mu$ και $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ και $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le x\right) = \Phi(x)$ ($\Phi(x)$ σ.κ. της $N(0,1)$)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X_n} - E[\overline{X_n}]}{\sqrt{Var[\overline{X_n}]}} \le x\right) = \Phi(x)$$

② Πρακτική χρήση του ΚΟΘ

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισον

$$P(a \le S_n \le b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{για} \\ n \ge 30}}{\overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx}} P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le Z \le \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right), \quad Z \sim N(0,1)$$

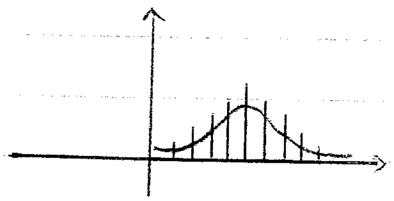
$$= \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

③ Διόρθωση Συνέχειας

$X_1, X_2, \dots$ διακριτές, ανεξάρτητες και ισόνομες με τιμές $\{0,1,2\dots\}$

Τότε $P(4 \le S_n \le 70) = P(3.8 \le S_n \le 70.8) = P(3.01 \le S_n \le 70.2)$

Για να εφαρμόσω το ΚΟΘ εφαρμόζω τη διόρθωση συνέχειας δηλ. παίρνω $P(3.5 \le S_n \le 70.5)$



Διωνυμική

Γενικά $P(a \le S_n \le b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$P(a - \frac{1}{2} \le S_n \le b + \frac{1}{2})$

Εδώ εφαρμόζω το ΚΟΘ

④ Άσκηση

Παίκτης ρίχνει ζάρι

Προσεγγιστικά $P(\text{σε } 42 \text{ ρίψεις κερδ τουλ. } 7) = ;$

Ρίψη	1	2	3	4	5	6
Κέρδος	-1	-2	-3	3	2	1

Λύση: X_i = κέρδος στην i ρίψη

S_{42} = συνολικό κέρδος σε 42 ρίψεις

$P(S_{42} \geq 7) = P_{ζητ} = ;$

$$P(S_{42} \geq 7) = P(S_{42} \geq 6.5) = P\left(\frac{S_{42} - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}} \geq \frac{6.5 - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}}\right)$$

$E[S_{42}] = 42\, E[X_i]$

$Var[S_{42}] = 42\, Var[X_i]$ (όχι $Var[S_{42}] = 42^2\, Var[X_i]$ συχνό λάθος

είναι $Var[S_{42}] = Var[\sum_{i=1}^{42} X_i] \neq Var[42X_i]$)

$$E[X_i] = \sum_x x\, P(X_i = x) = \frac{1}{6}((-1)+(-2)+(-3)+3+2+1) = 0$$

$$E[X_i^2] = \sum_x x^2\, P(X_i = x) = \frac{1}{6}((-1)^2+(-2)^2+(-3)^2+3^2+2^2+1^2) = \frac{28}{6}$$

$Var[X_i] = \frac{28}{6}$

$E[S_{42}] = 0$

$Var[S_{42}] = 14^2$

$$P_{ζητ} \underset{n=42\geq 30}{\overset{ΚΟΘ}{\simeq}} P\left(Z \geq \frac{6.5-0}{\sqrt{14^2}}\right) = P\left(Z \geq \frac{6.5}{14}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{6.5}{14}\right)$$

⑤ άσκηση

Ένα ταμείο μαζεύει μασούρια από κέρματα του 1 €

20% των μασουριών έχει 49 κέρματα

70% —//— 50 —//—

10% —//— 51 —//—

Προσεγγιστικά P(σε 100 μασούρια να υπάρχουν τουλ. 4990 €)

Λύση: X_i = # κερμάτων του i μασουριού

$$P_{ζητ} = P(S_{100} \geq 4990)$$

$$E[S_{100}] = 100 \cdot E[X_i]$$

$$Var[S_{100}] = 100 \cdot Var[X_i]$$

$$E[X_i] = 49 \cdot 0.2 + 50 \cdot 0.7 + 51 \cdot 0.1 = 49.9$$

$$E[X_i^2] = 49^2 \cdot 0.2 + 50^2 \cdot 0.7 + 51^2 \cdot 0.1 = 2490.3$$

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - E^2[X_i] = 2490.3 - 2490.01 = 0.29$$

$$E[S_{100}] = 4990$$

$$Var[S_{100}] = 29$$

$$P_{ζητ} = P(S_{100} \geq 4990) = P\left(\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \geq \frac{4989.5 - 4990}{\sqrt{29}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{29}}\right)$$

⑥ Άσκηση

Ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη $\sim$ Uniform$([-5, 5])$ σε χιλ. €

Προσεγγιστικά

1. P(σε 48 μέρες να κερδ. τουλ. 30) = ;
2. Το ποσό s ώστε με πιθ τουλ. 95% το εισόδημα σε 48 μέρες να είναι κατ' απόλυτη τιμή < s
3. Το πλήθος των ημερών που πρέπει να παίξει ώστε με πιθ τουλ 95% το εισόδημα να είναι κατ' απόλυτη τιμή < 50

Λύση: $X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισον

X_i = εισόδημα χαρτοπαίκτη την i μέρα

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ εισόδημα σε n μέρες

1. $P(S_{48} \geq 30) = ;$
2. $s = ;$ ώστε $P(|S_{48}| < s) \geq 0.95$
3. $\nu = ;$ ώστε $P(|S_\nu| < 50) \geq 0.95$

Δεν χρειάζεται διόρθωση συνέχειας γιατί X_i συνεχής

$$X \sim \text{Uniform}([a,b]) \text{ με } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$$

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-5}^{5} x \frac{1}{10}\,dx = 0$$

$$E[X_i^2] = \int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \frac{1}{10}\frac{250}{3} = \frac{25}{3}$$

$$Var[X_i] = \frac{25}{3}$$

$$E[S_n] = n \cdot 0 = 0$$

$$Var[S_n] = n \cdot \frac{25}{3} = \frac{25n}{3}$$

1. $$P(S_{48} \geq 30) = P\left(\frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \geq \frac{30-0}{20}\right) \underset{n=48 \geq 30}{\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq}} P(Z \geq 3/2) = $$

$Z \sim N(0,1)$

$$= 1 - \Phi(3/2)$$

2. $P(|S_{48}| < s) \geq 0.95 \iff P(-s < S_{48} < s) \geq 0.95$

$$\iff P\left(\frac{-s-0}{20} < \frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} < \frac{s-0}{20}\right) \geq 0.95$$

ΚΟΘ

$$\iff P\left(-\frac{s}{20} < Z < \frac{s}{20}\right) \geq 0.95 \quad , \ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\iff \Phi\left(\frac{s}{20}\right) - \Phi\left(-\frac{s}{20}\right) \geq 0.95$$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$\iff \Phi\left(\frac{s}{20}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{s}{20}\right)\right) \geq 0.95$$

$$\iff 2\Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 1.95$$

$$\iff \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\iff \frac{s}{20} \geq 1.96 \iff s \geq 20 \cdot 1.96 = 39.2$$

3. $P(|S_v| < 50) \geq 0.95 \iff P(-50 < S_v < 50) \geq 0.95$

$$\iff P\left(\frac{-50-0}{\sqrt{v 25/3}} < \frac{S_v - E[S_v]}{\sqrt{Var[S_v]}} < \frac{50-0}{\sqrt{v 25/3}}\right) \geq 0.95$$

$\iff \ldots$

$$\iff 2\Phi\left(\frac{50}{5\sqrt{\frac{v}{3}}}\right) \geq 1.95$$

$$\iff \Phi\left(\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{v}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\iff \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{v}} \geq 1.96$$

κλπ.

7 Τυχαίες Διανύσεις

(3) 1. Δίνεται σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$ με $a<x<b$ και $c<y<d$

ή σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$ ή $a<x<y<b$

$c=;$

$f_X(x)=;$

$f_Y(y)=;$

$f_{X|Y}(x|y)=;$

$E[X]=;$

$Var[X]=;$

$Cov[X,Y]=;$

X, Y ανεξ ;

$E[X|Y=y]=;$

2. Πείραμα τύχης σε 2 στάδια

(3)+(5) Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Bayes

Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

Πολλαπλασιαστικός νόμος

3. Τεχνικά Θέματα

Πιθανογεννήτριες

Ροπογεννήτριες

Αναγεννητικές Ιδιότητες

ΚΟΘ

⑧ Θέμα 1ο Ιανουάριος 2010 Α

|6Κ 8Μ| → 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση

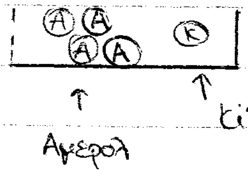
P(όλα να σφαιρ. ίδιου χρώματος) = $P(X=0) + P(X=4) = \dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}} + \dfrac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$

$X = \#K$

$P(X=x) = \dfrac{\binom{6}{x}\binom{8}{4-x}}{\binom{14}{4}}$

$\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}$ ← Εναλλακτικά με πολ/κό νόμο.

⑨ Θέμα 2ο Ιανουάριος 2010 Α



K ⇝ πιθ 1/2 (για αμερ)

K ⇝ πιθ 4/5 (για κιβδ)

Πείραμα * Επιλ νόμισμα στην τύχη

* Ρίψη 3 φορές

P(κίβδηλο | έφερε 3 Κ) = ;

$P(\text{κίβδηλο} \mid \text{έφερε } 3K) = \dfrac{\overset{=1/5}{P(\text{κιβδ})}\ \overset{=(4/5)^3}{P(\text{έφερε } 3K \mid \text{κιβδ})}}{P(\text{έφερε } 3K)} =$

$P(\text{έφερε } 3K) = P(\text{έφερε } 3K \mid \text{κιβδ})\, P(\text{κιβδ}) + P(\text{έφερε } 3K \mid \text{αμερ})\, P(\text{αμερ})$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{4}{5}.$