02.06.10 34° μάθημα

Ασκήσεις

① Θέμα 3° Ιανουάριος 2010 A

σ.π.π $f_X(x) = \begin{cases} c(3-x) & , 0<x<3 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

1. $c=;$

2. $F_X(x)=;$

3. $E[X]$, $Var[X]$

4. $Y=\log X$, $f_Y(y)$ σ.π.π

λύση: 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 c(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1$

$$\Rightarrow c\left(9-\frac{9}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{9}$$

2. $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \begin{cases} 0 & , x\le 0 \\ \int_0^x \frac{2}{9}(3-u)\,du & , 0<x<3 \\ 1 & , x\ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x\le 0 \\ \frac{2}{9}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right) & , 0<x<3 \\ 1 & , x\ge 3 \end{cases}$$

3. $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^3 x\,\frac{2}{9}(3-x)\,dx$$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

όπου $E[X^2] = \int_0^3 x^2\,\frac{2}{9}(3-x)\,dx$

4. $$F_Y(y) = P(Y\le y) = P(\log X \le y) = P(X\le e^y) = F_X(e^y)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(e^y)e^y = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-e^y)e^y & , 0<e^y<3 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{9}(3-e^y)e^y & , y<\log 3 \\ 0 & , y\ge \log 3 \end{cases}$$

② Θέμα 4° Ιανουάριος 2010 Α

Σύστ. με n_1 εξαρτ. τύπου A
n_2 B
που λειτουργούν ανεξάρτητα

Πιθ. λειτουργ. εξαρτ. τύπου $A \to p_1$
$B \to p_2$

Σύστ. λειτουργ. $\Leftrightarrow$ λειτ. τουλ. $2A+4B$

$n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 4$.

λύση: P(λειτουργ. συστήμ.) = P(λειτουργ. τουλ. 2 εξ A και τουλ. 4 εξ B) =

= P(λειτ. τουλ. 2 εξ A) $\cdot$ P(λειτ. τουλ. 4 εξ B) =

$$= \left(\sum_{k=2}^{n_1} \binom{n_1}{k} p_1^k (1-p_1)^{n_1-k}\right)\left(\sum_{k=4}^{n_2} \binom{n_2}{k} p_2^k (1-p_2)^{n_2-k}\right)$$

③ Θέμα 5° Ιανουάριος 2010 Α

Ακολουθία ανεξ. δοκιμών Bernoulli με πιθ. επιτ. p_1

N = # δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία

Στη συνέχεια N δοκιμές Bernoulli με πιθ. επιτ. p_2

X = # επιτυχιών , $P(X=1) = ;$

1. $P(N=n) = ;$
2. $P(N=n, X=x) = ;$
3. $P(X=x) = ;$
4. $P(N=n \mid X=x) = ;$
5. $E[X \mid N=n] = ;$
6. $E[X] = ;$

$n=1,2,\dots$
$x=0,1,2\dots$

λύση: 1. $P(N=n) = p_1(1-p_1)^{n-1}$, $n=1,2,\dots$

2. $P(N=n, X=x) = P(N=n)P(X=x \mid N=n) = p_1(1-p_1)^{n-1}\binom{n}{x}p_2^x(1-p_2)^{n-x}$

3. $P(X=x) \overset{ΘΟΠ}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)P(X=x \mid N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{n-1}\binom{n}{x}p_2^x(1-p_2)^{n-x} =$

$$= \left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)\left(\frac{p_2}{1-p_2}\right)^x \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{x}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} t^n \;//\; \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \overset{\frac{d^x}{dt^x}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)t^{n-x}}{x!} = \frac{\cancel{x!}}{(1-t)^{x+1}\cancel{x!}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} t^{n-x} = \frac{x!}{(1-t)^{x+1}\, x!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} t^n = \frac{t^x}{(1-t)^{x+1}}$$

4. $P(N=n \mid X=x) = \dfrac{P(N=n, X=x)}{P(X=x)} = \dfrac{P(N=n)\,P(X=x \mid N=n)}{P(X=x)}$

5. $E[X \mid N=n] = n \cdot p_2 \left(= \sum_{x=0}^{n} x\, P(X=x \mid N=n) = \dots\right)$

6. $E[X] \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)\, E[X \mid N=n] = \sum_{n=1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{n-1} n p_2 = p_1 p_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p_1)^{n-1} =$

Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$= p_1 p_2 \cdot \frac{1}{(1-(1-p_1))^2} = \frac{p_1 p_2}{p_1^2} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$
$$\overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

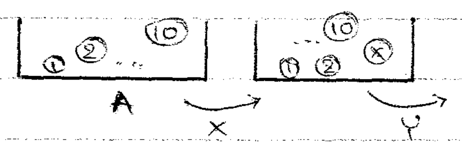
Το Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής το χρησιμοποιώ όταν θέλω να υπολογίσω τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που αναφέρεται στο 2ο στάδιο

④ Άσκηση

Πείραμα Τύχης

1ο στάδιο: Επιλογή τυχαία αριθμού από κάλπη με 10 σφαίρες, 1, 2, ..., 10
X = αριθμός που επιλέχθηκε

2ο στάδιο: Βάζω το X σε μια κάλπη με 10 σφαίρες 1, 2, ..., 10. Επιλέγω ξανά. Y = αριθμός που επιλέχθηκε



1. $P(X=x) = ;$
2. $P(X=x, Y=y) = ;$ Πολ/κος Νόμος
3. $P(Y=y) = ;$ ΘΟΠ
4. $P(X=x \mid Y=y) = ;$ Bayes
5. $E[Y \mid X=x] = ;$
6. $E[Y] = ;$ ΘΔΜΤ

Λύση: 1. $P(X=x) = \frac{1}{10}$, $x=1,2,\dots,10$

2. $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y \mid X=x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\frac{2}{11}, & y=x \\ \frac{1}{10}\frac{1}{11}, & y\neq x \end{cases}$ $\quad x=1,2,\dots 10$, $y=1,2,\dots 10$

3. $P(Y=y) = \sum_{x=1}^{10} P(X=x)\,P(Y=y \mid X=x) = 9\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11} + 1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{11} = \frac{1}{10}$

4. $P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x)P(Y=y \mid X=x)}{P(Y=y)} = \begin{cases} \frac{2}{11}, & y=x \\ \frac{1}{11}, & y\neq x \end{cases}$

5. $E[Y \mid X=x] = \sum_{y=1}^{10} y\,P(Y=y \mid X=x) = x\cdot\frac{2}{11} + \sum_{\substack{y=1 \\ y\neq x}}^{10} y\cdot\frac{1}{11} =$

$= x\cdot\frac{2}{11} + \frac{1}{11}\left(\sum_{y=1}^{10} y - x\right) =$

$= \frac{2x}{11} + \frac{1}{11}\left(\frac{10\cdot 11}{2} - x\right) = \frac{x}{11} + 5$

6. $E[Y] = \sum_{x=1}^{10} P(X=x)\,E[Y \mid X=x] = \sum_{x=1}^{10} \frac{1}{10}\left(\frac{x}{11}+5\right) =$

$= \frac{1}{\cancel{10\cdot 11}}\,\frac{\cancel{10\cdot 11}}{2} + 5 = \mathbf{5.5}$

⑤ Θέμα 6° Ιανουάριος 2010 A

X, Y ανεξ με $0 < Var(X), Var(Y) < \infty$. Νδο $\rho(X+Y, X-Y) = \frac{Var[X]-Var[Y]}{Var[X]+Var[Y]}$

απόδειξη: $\rho(X+Y, X-Y) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{Var(X+Y)}\sqrt{Var(X-Y)}} =$

$= \frac{cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y)}{\sqrt{Var(X)+Var(Y)}\ \sqrt{Var(X)+Var(Y)}} =$

$= \frac{Var[X] - Var[Y]}{Var[X] + Var[Y]}$