15/9/13

# Παραδείγματα

## 1. Πλαίσιο

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \leftrightarrow$ Χώρος Πιθανότητας

↳ Συνάρτηση πιθανότητας

$\Omega$: Δειγματικός χώρος, $\mathcal{A}$: οικογένεια ενδεχομένων

Αξίωμα 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Αξίωμα 2: $P(\Omega) = 1$

Αξίωμα 3: $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (Ασυμβίβαστα)

↳ (αν γίνει το ένα δεν γίνονται τα άλλα)

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## 2. Ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$ Αδύνατο ενδεχόμενο
   (Πιθανότητα κενού → 0 όμως 0 πιθανότητα όχι κατά ανάγκην κενό σύνολο)

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$ (Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού)

Τομή

4. $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{n+1} (E_1 E_2 \dots E_n)$

5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ (Η ισότητα ισχύει όταν είναι ασυμβίβαστα)

7. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

8. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$, $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

## 3. Αποδείξεις

1. $P(\emptyset) = 0$

$E_1 = \Omega$, $E_2 = E_3 = \dots = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \Rightarrow \underset{1}{P(\Omega)} = \underset{1}{P(E_1)} + \cancel{P(\emptyset)}^{0} + \cancel{P(\emptyset)}^{0} + \dots$$

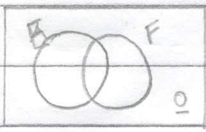
$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0 \quad (P(\emptyset) \geq 0)$$

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

$E_1 = E$, $E_2 = E^c$, $E_3 = E_4 = \dots = \emptyset$

Όμοια με την 1

3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$




$$P(E \cup F) = P(EF^c \cup EF \cup E^cF)$$
$$= \underbrace{P(EF^c) + P(EF)}_{P(E)} + P(E^cF) \quad \text{(Το } P(EF) \text{ έχει χρησιμοποιηθεί 2 φορές)}$$
$$P(EF) + P(E^cF) = P(F)$$
$$= P(E) + P(F) - P(EF)$$

4. $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) - \dots + (-1)^{n+1}(E_1E_2 \dots E_n)$

Όπως η 3 + Επαγωγή

5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup (BA^c)$ ↳ ασυμβίβαστα

$\Rightarrow P(B) = P(A) + \boxed{P(BA^c)} \geq 0$

$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

$F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_n$ → Ξένα μεταξύ τους

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2E_1^c \cup E_3E_2^cE_1^c \cup \dots \cup E_nE_1^cE_2^c \dots E_{n-1}^c$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

ΒΑΣΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ

Γενικά, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

$F_i \subseteq E_i$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

↳ ασυμβίβαστα

7. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \quad , P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

Θέτουμε $F_i = E_i E_1^c E_2^c \ldots E_{i-1}^c = E_i \cdot E_{i-1}^c$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$\hookrightarrow P(E_n)$

8. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \quad , P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

$E_1^c \subseteq E_2^c \subseteq E_3^c \subseteq \ldots$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c) \Rightarrow P((\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)^c) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$\Rightarrow 1 - P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n) \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).$$

## 4. Παράδειγμα

Οικογένεια με 4 παιδιά
Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών;
3-1 ή 2-2;

**Υποψήφιοι Δειγματικοί χώροι.**

$\Omega_1 = \{0-4,\ 1-3,\ 2-2,\ 3-1,\ 4-0\}$

Α-Κ (Με βάση το πλήθος των αγοριών)

$\Omega_2 = \{$4 όμοιου φύλου, 3 όμοιου φύλου - 1 διαφορετικού, 2-2$\}$

$\Omega_3 = \{ΑΑΑΑ, ΑΑΑΚ, ΑΑΚΑ, \ldots, ΚΚΚΚ\}$

(Με βάση την καταγραφή του φύλου με τη σειρά γέννησης)

▸ Από όλους τους δειγματικούς χώρους "καλός" είναι αυτός που έχει ισοπίθανα στοιχεία.

Ο $\Omega_3$ έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

Πιθανότητα "3-1" $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$

Πιθανότητα "2-2" $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

Πιθανότητα "4-0" $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

## 5. Παράδειγμα

3 φίλοι πάνε σινεμά. Ρίχνουν (δίκαιο) νόμισμα.
Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει.

Ο Δειγματικός χώρος με ισοπίθανα δειγματικά σημεία:

Δειγματικός χώρος = {κκκ, κκΓ, κΓκ, κΓΓ, Γκκ, ΓκΓ, ΓΓκ, ΓΓΓ}

$P(\text{κερνάει}) = 1 - P(\text{δεν κερνάει})$
$= 1 - P(\{\text{κκκ}, \text{ΓΓΓ}\})$
$= 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

## 6. Παράδειγμα

Παιχνίδι "chuck-a-luck" — (π.χ. στοιχηματίζω στο "5").
Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
Ρίχνονται 3 ζάρια.
Κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά στην οποία στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.

Έστω ότι ο παίχτης στοιχηματίζει στην έδρα i.
A = Στην πρώτη ζαριά έρχεται η ένδειξη i.
B = Στη δεύτερη ζαριά έρχεται η ένδειξη i.
Γ = Στη τρίτη ζαριά έρχεται η ένδειξη i

(ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ)

Πιθανότητα να κερδίσει $= P(A \cup B \cup \Gamma)$
$= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}$